

6. Statische Stabilität, Spannungsstabilität

6.1 Geschlossene Lösung der Lastflussgleichungen für ein einfaches Übertragungssystem

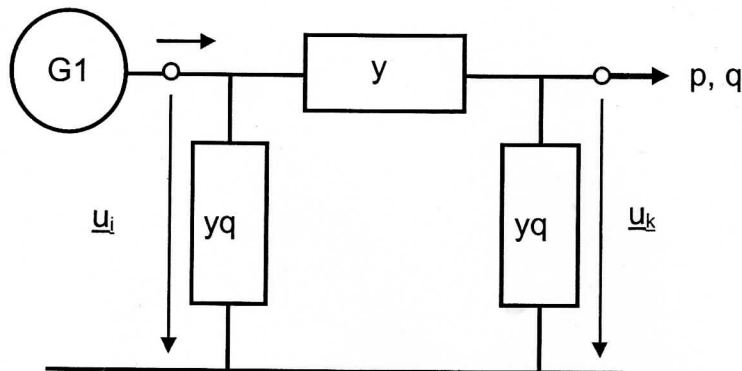


Abb. 6.1-1 Einfaches Übertragungssystem mit spannungsunabhängiger Last
 y Admittanz des Übertragungssystems
 p, q Wirk und Blindlast
 $\underline{u}$ Komplexe Spannungen, u_i fest vorgegeben (Bezugsspannung)

Gegeben sind:

- Bezugsspannung u_i ,
- Admittanzen y, yq
- Wirk- und Blindlast p und q . Bei induktiver Last besitzen p und q vereinbarungsgemäß negatives Vorzeichen.

Gesucht: Spannung u_k .

Lastflussgleichungen, vgl. Kap. 1.2.2:

$$\mathbf{s} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Y}^* \cdot \mathbf{u}^* \quad (6.1-1)$$

$\mathbf{s}$ Vektor der Knotenleistungen

$\mathbf{U}$ Diagonalmatrix der Knotenspannungen

$\mathbf{Y}$ Knotenpunktsadmittanzmatrix

$\mathbf{u}$ Vektor der Knotenspannungen

Für das vorliegende einfache "Netz" ist eine geschlossene Lösung der Lastflussgleichungen möglich. Aus Gl. (6.1-1) folgt (Unterstriche bezeichnen komplexe Größen):

$$\underline{s}_k = \underline{s}_{ki} = \underline{u}_k \cdot \underline{yq}^* \cdot \underline{u}_k^* - \underline{u}_k \cdot \underline{y}^* \cdot \underline{u}_i^* \quad (6.1-2)$$

$$\underline{u}_i = u_i \cdot \exp(j\varphi_i), \underline{u}_k = u_k \cdot \exp(j\varphi_k) \quad (6.1-3)$$

$$\varphi = \varphi_k - \varphi_i \quad (6.1-4)$$

$$\underline{y} = y \cdot \exp(j\alpha) \quad (6.1-5)$$

$$\underline{yd} = \underline{y} + \underline{yq} \quad (6.1-6)$$

$$\underline{yd} = yd \cdot \exp(j\alpha_d) \quad (6.1-7)$$

$$\underline{z} = z \cdot \exp(j\phi) = 1/\underline{y} = 1/y \cdot \exp(-j\alpha) \quad (6.1-8)$$

z.B.:

$$\underline{z} = r + jx; \text{ mit } r = 0 \Rightarrow \phi = \text{atan}(x/r) = 90^\circ; \alpha = -90^\circ \quad (6.1-9)$$

Die Lasten werden spannungsabhängig angenommen:

$$p(u_k) = p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} \quad (6.1-10)$$

$$q(u_k) = q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} \quad (6.1-11)$$

p_n, q_n Leistungen bei $u_k = u_n$

fp, fq Spannungsfaktoren für Wirk- und Blindleistungen

u_n Nennspannung

$$\text{Re}(\underline{s}_k) = p(u_k) = p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} = u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d - u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos(\varphi - \alpha) \quad (6.1-12)$$

$$\text{Im}(\underline{s}_k) = q(u_k) = q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} = -u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d - u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \sin(\varphi - \alpha) \quad (6.1-13)$$

Lösung nach u_k :

Quadrieren von p und q :

$$p_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2fp} = u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \cos^2 \alpha_d + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 \cdot \cos^2(\varphi - \alpha) - 2 \cdot u_k^3 \cdot u_i \cdot y_d \cdot y \cdot \cos \alpha_d \cdot \cos(\varphi - \alpha) = \quad (6.1-14a)$$

(Substitution von (6.1-12) im 3. Term von (6.1-14a)):

$$= u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \cos^2 \alpha_d + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 \cdot \cos^2(\varphi - \alpha) + 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d \cdot (p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} - u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d) \quad (6.1-14b)$$

$$q_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2fq} = u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \sin^2 \alpha_d + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 \cdot \sin^2(\varphi - \alpha) + 2 \cdot u_k^3 \cdot u_i \cdot y_d \cdot y \cdot \sin \alpha_d \cdot \sin(\varphi - \alpha) = \quad (6.1-15a)$$

((Substitution von (6.1-13) im 3. Term von (6.1-15a)):

$$= u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \sin^2 \alpha_d + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 \cdot \sin^2(\varphi - \alpha) - 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d \cdot (q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d) \quad (6.1-15b)$$

Addition von Gl. (6.1.14b) und (6.1.15b) ergibt ein Gleichungssystem 4. Ordnung für den Spannungsbetrag u_k :

$$p_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2fp} + q_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2fq} = -u_k^4 \cdot y_d^2 + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 + 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot (p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} \cdot \cos \alpha_d - q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} \cdot \sin \alpha_d) \quad (6.1-16)$$

6.2 Ermittlung der Spannungsstabilitätsgrenze mittels der geschlossenen Lösung der Lastflussgleichungen

Spannungsstabilitätsprobleme sind mit langsamen Zustandsänderungen des Netzes verbunden und können daher als stationäre Probleme behandelt werden.

Spannungsstabilitätsprobleme äußern sich folgendermaßen:

Bei zu hoher Netzlast, insbesondere bei Blindleistungsmangel, besteht die Gefahr des Netzzusammenbruchs durch Spannungskollaps.

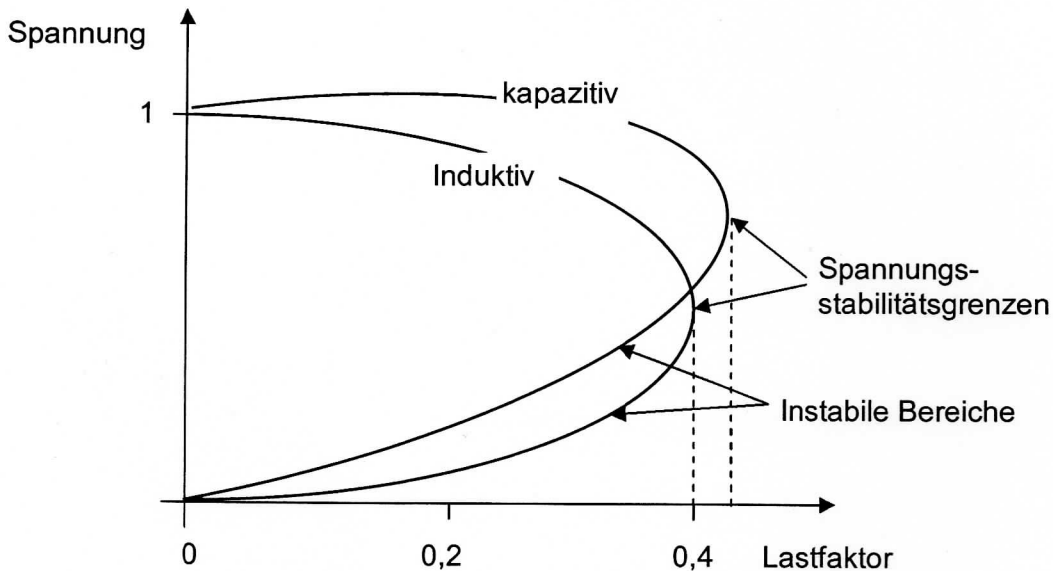


Abb. 6.2-1 PV- Kurven bei unterschiedlichen Lastfaktoren für induktive und kapazitive Last
Lastfaktor: $s/s_{\text{nenn}} - 1$

Fragestellung:

Zulässige Netzhöchstlast bei ausreichendem Abstand zum Spannungskollapsunkt.

Es werden 3 Spezialfälle betrachtet:

Spezialfall 1: $f_p = f_q = 0$

$$p_n = p, q_n = q$$

Damit ergibt sich aus Gl. (6.1-16) für u_k :

$$p^2 + q^2 = -u_k^4 \cdot yd^2 + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 + 2 \cdot u_k^2 \cdot yd \cdot (p \cdot \cos \alpha_d - q \cdot \sin \alpha_d)$$

bzw.

$$u_k^4 \cdot yd^2 - u_k^2 \cdot B + C \quad (6.2-1)$$

mit

$$B = u_i^2 \cdot y^2 + 2 \cdot yd \cdot (p \cdot \cos \alpha_d - q \cdot \sin \alpha_d) \quad (6.2-2)$$

$$C = p^2 + q^2 \quad (6.2-3)$$

Lösung:

$$u_k^2 = \frac{1}{2yd^2} \cdot (B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot yd^2 \cdot C}) \quad (6.2-4)$$

Man erkennt aus Gl. (6.2-4), dass komplexe Lösungen für den Spannungsbetrag möglich sind. Diese beschreiben physikalisch nicht existente Netzzustände. Gelangt das Netz in einen Zustand, für welchen die **Lösungen der Spannungsbetragsgleichung komplex** werden, so äußert sich dies physikalisch im Spannungskollaps bzw. **Blackout des gesamten Netzes**.

In B (Gl. (6.2-2)) entspricht die Größe $u_i^2 \cdot y$ jener Leistung, welche auftritt, wenn Knoten k gegen Erde kurzgeschlossen wird. Bei normalen Betriebszuständen sind die Lasten p, q immer kleiner als diese Kurzschlussleistung. Die Größe B ist daher in der Praxis größer als 0. Dagegen kann der Fall

$$B^2 < 4 \cdot yd^2 \cdot C \quad (6.2-5)$$

bzw.

$$p^2 + q^2 > \frac{B^2}{4yd^2} \quad (6.2-6a)$$

bzw.

$$p^2 + q^2 > \frac{u_i^4}{4} \cdot \left(\frac{y^4}{yd^2} \right) + (p \cdot \cos \alpha_d - q \cdot \sin \alpha_d)^2 + u_i^2 \cdot \frac{y^2}{yd} (p \cdot \cos \alpha_d - q \cdot \sin \alpha_d) \quad (6.2-6b)$$

durchaus auftreten.

Gl. (6.2-6) ist daher die Grenzbedingung für den Spannungskollaps.

An der Spannungsstabilitätsgrenze lautet daher u_k^2 mit $B^2 = 4 \cdot yd^2 \cdot C$:

$$u_k^2 = \frac{1}{2yd^2} \cdot B = \frac{u_i^2}{2} \cdot \left(\frac{y}{yd} \right)^2 + \frac{1}{yd} (p \cdot \cos \alpha_d - q \cdot \sin \alpha_d) \quad (6.2-7)$$

Setzt man Gl. (6.2.7), nämlich $u_k^2 = B/2yd^2$, in Gl. (6.2.6a) ein, so erhält man eine alternative Formulierung der Stabilitätsbedingung, und zwar als Funktion der Spannung am Lastknoten k:

$$p^2 + q^2 > u_k^4 \cdot yd^2 \quad (6.2-6c)$$

Sonderfall: Spannungsstabilität bei Wirklast

Es gilt : $q = 0$.

Zu Vereinfachung: Vernachlässigung des ohmschen Widerstandes der Übertragungsstrecke und der Queradmittanz yq :

$r = 0$; $\Rightarrow \phi = \arctan(x/r) = 90^\circ$; $\Rightarrow \alpha_d = \alpha = -90^\circ$; vgl. Gl. (6.1-9).

Aus (6.2-6b) folgt:

Spannungsstabilitätsgrenze überschritten bei $|p| > y \cdot u_i^2/2$ bzw.
maximale stabil übertragbare Wirkleistung: $|p_{\max}| = y \cdot u_i^2/2$ (halbe Kurzschlussleistung).

Aus (6.2-7) folgt:

$$u_k^2 = u_i^2/2.$$

$$u_k = u_i/\sqrt{2}. \quad (6.2-8)$$

Spannungszeigerdiagramm für den stabilen Grenzfall bei $q=0$:

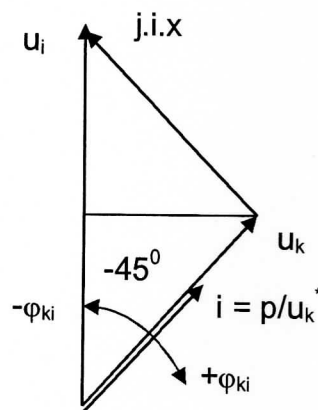


Abb. 6.2-2 Zeigerdiagramm für Betrieb an der Spannungsstabilitätsgrenze bei Wirklast und verlustlosem Übertragungssystem ($r=0$)

Achtung auf Vorzeichen:

Last erzeugt Lastfluss von k nach i . An Knoten k ankommende Leistung ist **negativ** anzusetzen.

Aus Gl. (6.1-12) folgt für $f_p=1$, $\alpha = -90^\circ$: $p_k = p_{ki} = u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos(\varphi+90) = u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \sin(\varphi) < 0$ (Last),
daher: $\varphi_{ki} < 0$!

Sonderfall: Spannungsstabilität bei Blindlast

Es gilt : $p = 0$.

Ferner gilt wie vorhin: $yq=0$, $r = 0$ bzw. $\alpha = -90^\circ$.

Aus Gl. (6.2-6b) folgt:

Spannungsstabilitätsgrenze überschritten bei $-q > y \cdot u_i^2/4$ bzw.
maximale stabil übertragbare Blindleistung: $q_{\max} = -y \cdot u_i^2/4$. (Negativ bedeutet induktiv).

Aus (6.2-7) folgt:

$$u_k^2 = \frac{u_i^2}{2} + \frac{1}{y} \cdot \left(-y \cdot \frac{u_i^2}{4} \right) = \frac{u_i^2}{4}$$

bzw.

$$u_k = u_i/2.$$

(6.2-9)

Spannungszeigerdiagramm für den stabilen Grenzfall bei $p=0$:

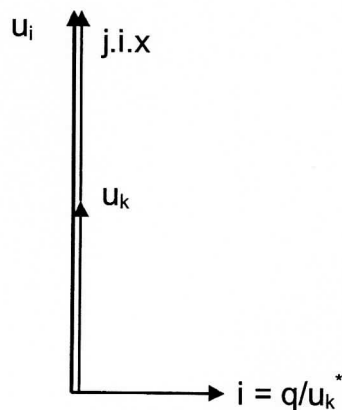


Abb. 6.2-3 Zeigerdiagramm für Betrieb an der Spannungsstabilitätsgrenze bei Blindlast (induktiv) und verlustlosem Übertragungssystem ($r=0$)

Spezialfall 2: $p_n = q_n = 1$

Aus Gl. (6.1-16) ergibt sich für u_k :

$$\frac{p_n^2 + q_n^2}{u_n^2} \cdot u_k^2 = -u_k^4 \cdot yd^2 + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 + 2 \cdot u_k^3 \cdot yd \cdot \left(\left(\frac{p_n}{u_n} \right) \cdot \cos \alpha_d - \left(\frac{q_n}{u_n} \right) \cdot \sin \alpha_d \right)$$

bzw.

$$u_k^2 \cdot yd^2 - u_k \cdot B_1 + C_1 \quad (6.2-10)$$

mit

$$B_1 = 2 \cdot yd \cdot \left(\left(\frac{p_n}{u_n} \right) \cdot \cos \alpha_d - \left(\frac{q_n}{u_n} \right) \cdot \sin \alpha_d \right) \quad (6.2-11)$$

$$C_1 = \frac{p_n^2 + q_n^2}{u_n^2} - u_i^2 \cdot y^2 \quad (6.2-12)$$

Auch hier sind für den Spannungsbetrag theoretisch komplexe Lösungen möglich, Gl. (6.2-13):

$$u_k = \frac{1}{2yd^2} \cdot (B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4 \cdot yd^2 \cdot C_1}) \quad (6.2-13)$$

Instabilität tritt auf, wenn gilt (vgl. (6.2-5)):

$$4yd^2 \cdot \left(\left(\frac{p_n}{u_n} \right) \cdot \cos \alpha_d - \left(\frac{q_n}{u_n} \right) \cdot \sin \alpha_d \right)^2 < 4yd^2 \cdot \left(\frac{p_n^2 + q_n^2}{u_n^2} - u_i^2 \cdot y^2 \right)$$

bzw. nach entsprechender Umformung:

$$\left(\left(\frac{p_n}{u_n} \right) \cdot \sin \alpha_d + \left(\frac{q_n}{u_n} \right) \cdot \cos \alpha_d \right)^2 > u_i^2 \cdot y^2 \quad (6.2-14)$$

In Gl. (6.2-14) bedeutet $u_i \cdot y$ den Kurzschlussstrom, während p_n/u_n und q_n/u_n dem Wirk- bzw. Blind- Laststrom bei Nennspannung entspricht. Spannungsinstabilität tritt daher hier nur im hypothetischen Fall, dass der Laststrom größer als der Kurzschlussstrom ist, ein.

An der Spannungsstabilitätsgrenze lautet u_k mit $B_1^2 = 4 \cdot yd^2 \cdot C_1$ und $z = 1/yd$:

$$u_k = (1/yd) \cdot \left(\left(\frac{p_n}{u_n} \right) \cdot \cos \alpha_d - \left(\frac{q_n}{u_n} \right) \cdot \sin \alpha_d \right) = z \cdot \left(\left(\frac{p_n}{u_n} \right) \cdot \cos \alpha_d - \left(\frac{q_n}{u_n} \right) \cdot \sin \alpha_d \right) \quad (6.2-15)$$

Sonderfall: Spannungsstabilität bei Wirklast

$\alpha = -90^\circ$ (Ohmscher Widerstand $r = 0$) und $q = 0$.

Aus Gl. (6.2-14) folgt:

System instabil bei $(p_n/u_n)^2 > u_i^2 \cdot y^2$.

Aus Gl. (6.2-15) folgt für u_k an der Spannungsstabilitätsgrenze:

$u_k = 0$.

Sonderfall: Spannungsstabilität bei Blindlast

$\alpha = -90^\circ$, $p = 0$.

Aus Gl. (6.2-14) folgt:

Das System wäre instabil bei $u_i^2 \cdot y^2 < 0$. $u_i^2 \cdot y^2$ ist jedoch positiv definit, daher ist das System immer stabil.

Spezialfall 3: $f_p = f_q = 2$

Aus Gl. (6.1-16) ergibt sich für u_k :

$$p_n^2 \cdot (u_k/u_n)^4 + q_n^2 \cdot (u_k/u_n)^4 = -u_k^4 \cdot yd^2 + u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 + 2 \cdot u_k^2 \cdot yd \cdot (p_n \cdot (u_k/u_n)^2 \cdot \cos \alpha_d - q_n \cdot (u_k/u_n)^2 \cdot \sin \alpha_d)$$

bzw.

$$[(p_n/u_n^2)^2 + (q_n/u_n^2)^2] \cdot u_k^2 + u_k^2 \cdot yd^2 - 2 \cdot u_k^2 \cdot yd \cdot (p_n/u_n^2 \cdot \cos \alpha_d - q_n/u_n^2 \cdot \sin \alpha_d) = u_i^2 \cdot y^2 \quad (6.2-16)$$

Quadratische Abhängigkeit der Last von der Spannung entspricht einer Impedanzlast.

Die Lastimpedanz wird angesetzt zu:

$$\underline{y}_v = y_v \cdot \exp(j\alpha_v) \quad (6.2-17)$$

Für die Leistung an der Lastimpedanz ergibt sich (negative Vorzeichen für induktive Last):

$$p = p_n \cdot (u_k/u_n)^2 = \operatorname{Re}(-\underline{u}_k \cdot \underline{y}_v^* \cdot \underline{u}_k^*) = -u_k^2 \cdot y_v \cdot \cos \alpha_v \quad (6.2-18a)$$

$$\rightarrow p_n/u_n^2 = -y_v \cdot \cos \alpha_v \quad (6.2-18b)$$

$$q = q_n \cdot (u_k/u_n)^2 = \operatorname{Im}(-\underline{u}_k \cdot \underline{y}_v^* \cdot \underline{u}_k^*) = u_k^2 \cdot y_v \cdot \sin \alpha_v \quad (\text{Achtung: } \operatorname{Im}(\underline{y}_v^*) = -y_v \cdot \sin \alpha_v) \quad (6.2-19a)$$

$$\rightarrow q_n/u_n^2 = y_v \cdot \sin \alpha_v \quad (6.2-19b)$$

Einsetzen von (6.2-18b) und (6.2-19b) in (6.2-16) ergibt:

$$(y_v^2 \cdot \cos^2 \alpha_v + y_v^2 \cdot \sin^2 \alpha_v + 2 \cdot yd \cdot y_v \cdot (\cos \alpha_v \cdot \cos \alpha_d + \sin \alpha_v \cdot \sin \alpha_d) + yd^2) \cdot u_k^2 = u_i^2 \cdot y^2$$

bzw.

$$(y_v^2 + 2 \cdot yd \cdot y_v \cdot \cos(\alpha - \alpha_v) + yd^2) \cdot u_k^2 = u_i^2 \cdot y^2 \quad (6.2-20)$$

Mit

$$y^2 + y_v^2 + 2 \cdot yd \cdot y_v \cdot \cos(\alpha - \alpha_v) = |yd + y_v|^2 \quad (6.2-21)$$

folgt:

$$u_k^2 \cdot |yd + y_v|^2 = u_i^2 \cdot y^2 \quad (6.2-22)$$

und

$$u_k = u_i \cdot (y / |yd + y_v|) \quad (6.2-23)$$

Es existieren nur reelle (physikalisch sinnvolle) Lösungen von Gl. (6.2-22). Ein System mit Impedanzlasten ist daher immer stabil. Gl. (6.2-23) stellt die Spannungsteilerregel in Leitwertformulierung dar, vgl. Abb. 6.2-4.

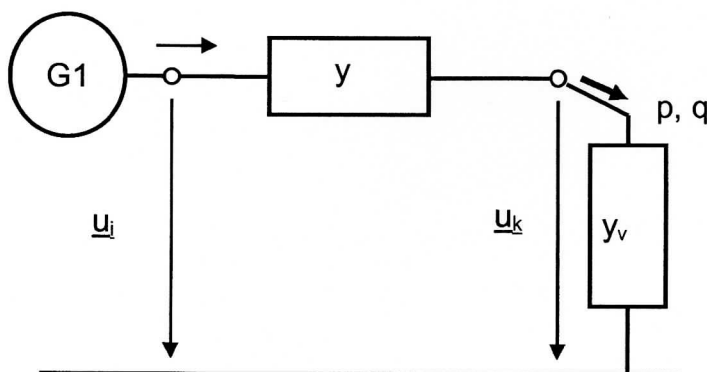


Abb. 6.2-4 Einfaches Übertragungssystem mit spannungsabhängiger Last (Impedanzlast)

Bei komplizierten Netzen ist eine geschlossene Lösung des Spannungsstabilitätsproblems unmöglich. Es müssen daher andere Methoden angewandt werden.

6.3 Ermittlung der Spannungsstabilitätsgrenze mittels L- Index

Ziel: Ermittlung eines Indikators zur Überprüfung der Spannungsstabilität der Knoten von Netzen beliebiger Größe.

Das Prinzip wird in Abb. 6.3-1 erläutert.

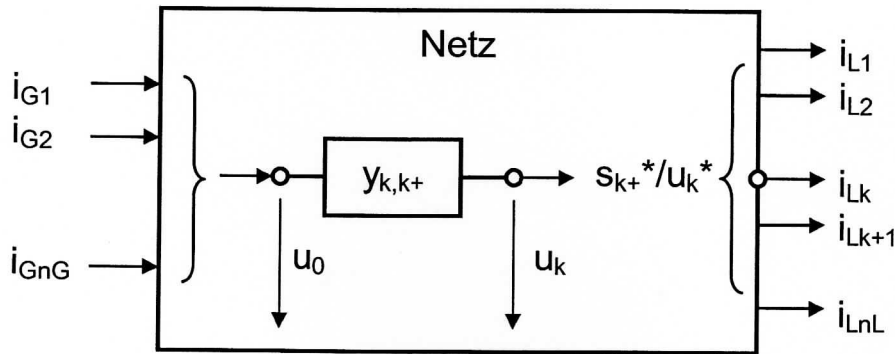


Abb. 6.3-1. Reduktion eines Netzes beliebiger Größe nach dem Prinzip der Ersatzspannungsquelle

Die Knotenpunktadmittanzmatrix des Netzes wird in einen Erzeugungs- (G) und Lastanteil (L) partitioniert. Zeile und Spalte des Bezugsknotens werden hierbei berücksichtigt und der Erzeugungspartition zugeteilt. Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung lautet somit:

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_L \\ \underline{i}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{LL} & \underline{Y}_{LG} \\ \underline{Y}_{GL} & \underline{Y}_{GG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_L \\ \underline{u}_G \end{bmatrix} \quad (6.3-1)$$

$\underline{i}_L$ und $\underline{u}_L$ sind Vektoren der Dimension n_L , wobei n_L die Anzahl der Lastknoten ist. Die Vektoren $\underline{i}_G$ und $\underline{u}_G$ besitzen die Dimension n_G , welche durch die Anzahl der Einspeisungen einschließlich des Bezugsknotens festgelegt wird.

Aus Gl. (6.3-1) wird durch Variablentausch zwischen $\underline{i}_L$ und $\underline{u}_L$ eine *Hybridmatrix*- Darstellung gebildet, welche lautet:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_L \\ \underline{i}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{LL} & \underline{F} \\ \underline{K} & \underline{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_L \\ \underline{u}_G \end{bmatrix} \quad (6.3-2)$$

mit

$$\underline{Z}_{LL} = \underline{Y}_{LL}^{-1} \quad (6.3-3)$$

$$\underline{F} = -\underline{Z}_{LL} \cdot \underline{Y}_{LG} \quad (6.3-4)$$

$$\underline{K} = \underline{Z}_{LL} \cdot \underline{Y}_{GL} \quad (6.3-5)$$

$$\underline{E} = -\underline{Y}_{GL} \cdot \underline{Z}_{LL} \cdot \underline{Y}_{LG} \quad (6.3-6)$$

Für einen beliebigen Lastknoten Nr. k erhält man aus Gl. (6.3-2) (Index L wird fortgelassen):

$$\underline{u}_k = \frac{1}{\underline{y}_{k,k+}} \cdot \underline{i}_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n_L} \underline{z}_{k,i} \cdot \underline{i}_i + \sum_{j=1}^{n_G} \underline{f}_{k,j} \cdot \underline{u}_j \quad (6.3-7)$$

mit

$$\frac{1}{\underline{y}_{k,k+}} = \underline{z}_{k,k}$$

$1/\underline{y}_{k,k+}$ ist daher das k-te Diagonalelement der zu den Lastknoten gehörenden inversen Admittanzmatrix bzw. der Impedanzmatrix $\underline{Z}_{LL}$.

In Gl. (6.3-7) sind Strom $\underline{i}_k$ und die Ströme $\underline{i}_j$ Lastströme, die Spannungen $\underline{u}_j$ (ganz rechts) gehören zu Einspeisungen.

Substituiert man in Gl. (3.3-7) für den rechten Ausdruck

$$\underline{u}_0 = \sum_{j=1}^{n_G} \underline{f}_{k,j} \cdot \underline{u}_j, \quad (6.3-8)$$

und ersetzt man die Ströme durch Leistungen:

$$\underline{i} = \underline{s}^* / \underline{u}^* \quad (6.3-9)$$

so erhält man:

$$\underline{u}_k = \frac{\underline{s}_k^*}{\underline{u}_k \cdot \underline{y}_{k,k+}} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n_L} \underline{z}_{k,i} \cdot \frac{\underline{s}_i^*}{\underline{u}_i} + \underline{u}_0 \quad (6.3-10)$$

bzw.

$$\underline{u}_k - \underline{u}_0 = \frac{\underline{s}_{k+}^*}{\underline{u}_k \cdot \underline{y}_{k,k+}} \quad (6.3-11)$$

mit

$$\underline{s}_{k+} = \underline{s}_k + \underline{s}_{k,korr} \quad (6.3-12)$$

und

$$\underline{s}_{k,korr} = \underline{u}_k \cdot \underline{y}_{k,k+}^* \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n_L} \underline{z}_{k,i}^* \cdot \frac{\underline{s}_i^*}{\underline{u}_i} \quad (6.3-13)$$

Konjugiert

Gl. (6.3-11) korrespondiert mit der in Abb. 6.3-1 eingezeichneten Ersatznetz- Darstellung.

Nach einer weiteren Umformung ergibt sich aus Gl. (6.3-11):

$$\frac{\underline{u}_k - \underline{u}_0}{\underline{u}_k} = \frac{\underline{s}_{k+}^*}{\underline{u}_k^2 \cdot \underline{y}_{k,k+}} \quad (6.3-14)$$

Mit (6.3-14) wird gemäß [6] der für Netze mit beliebiger Größe gültige L-Faktor gebildet:

M 1
G

N 2
L

$$L = \left| 1 - \frac{\underline{u}_0}{\underline{u}_k} \right| = \left| \frac{\underline{s}_{k+}^*}{\underline{u}_k^2 \cdot \underline{y}_{-k,k+}} \right| \quad \text{— un k.} \quad (6.3-15)$$

Gemäß [6] gilt nun:

Die Bedingung $L = 1$ ist ein Indikator für den Spannungskollaps an Knoten k. Ist dagegen Index L deutlich kleiner als 1, so ist die Spannung hinsichtlich Laständerungen stabil.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt anhand des einfachen Systems, Abb. 6.1-1. Das mittels Admittanzmatrix formulierte Gleichungssystem lautet:

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_k \\ \underline{i}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{LL} & \underline{Y}_{LG} \\ \underline{Y}_{GL} & \underline{Y}_{GG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}d & -\underline{y} \\ -\underline{y} & \underline{y}d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u}_i \end{bmatrix} \quad (6.3-16)$$

$$\underline{Y}_{LL} = \underline{y}d = \underline{y} + \underline{y}q \quad (6.3-17)$$

Da $\underline{Y}_{LL}$ hier ein Skalar ist, folgt weiters:

$$\underline{y}_{k,k+} = \underline{y}d \quad (6.3-18)$$

$$\underline{Y}_{LG} = -\underline{y} \quad (6.3-19)$$

Gl. (6.3-4):

$$\underline{F} = -\underline{Y}_{LL}^{-1} \cdot \underline{Y}_{LG} = \frac{\underline{y}}{\underline{y}d} = \underline{f}_{-k,i} \quad (6.3-20)$$

Gl. (6.3-8) mit $n_G = 1$, Einspeisung erfolgt in Knoten i:

$$\underline{u}_0 = \underline{f}_{-k,i} \cdot \underline{u}_i = \frac{\underline{y}}{\underline{y}d} \cdot \underline{u}_i, \quad (6.3-21)$$

Ferner gilt gemäß Gl. (6.3-13), da nur ein einziger Lastknoten vorliegt:

$$\underline{s}_{k,korr} = 0 \quad (6.3-22)$$

und

$$\underline{s}_{k+} = \underline{s}_k \text{ (Last an Knoten k)} \quad (6.3-23)$$

Setzt man Gl. (6.3-18), (6.3-21) und (6.3-23) in (6.3-14) ein, so erhält man:

$$\frac{\underline{u}_k - \frac{\underline{y}}{\underline{y}d} \cdot \underline{u}_i}{\underline{u}_k} = \frac{\underline{s}_k^*}{\underline{u}_k^2 \cdot \underline{y}d} \quad (6.3-24)$$

Damit ergibt sich der L-Index des Knotens k zu:

$$L_k = \left| 1 - \frac{\underline{y}}{\underline{y}d} \cdot \frac{\underline{u}_i}{\underline{u}_k} \right| = \left| \frac{1}{\underline{u}_k^2} \cdot \frac{\underline{s}_k^*}{\underline{y}d} \right| \quad (6.3-25)$$

An der Stabilitätsgrenze sollte der Index zu 1 werden. Zum Beweis wird vorerst das Quadrat des Betrags gebildet, wobei die rechte Formulierung der Gl. (6.3-25) angewendet wird.

$$L^2 = \left(\frac{1}{u_k^2} \cdot \frac{s_k^*}{yd} \right) \left(\frac{1}{u_k^2} \cdot \frac{s_k^*}{yd} \right)^* = \frac{1}{u_k^4} \cdot \frac{s_k^2}{yd^2} \quad (6.3-26)$$

An der Stabilitätsgrenze beträgt die Scheinleistung nach Gl. (6.2-6a):

$$p^2 + q^2 = s_k^2 = \frac{B^2}{4yd^2} \quad (6.3-27)$$

Die entsprechende Spannung lautet gemäß Gl. (6.2-7):

$$u_k^2 = \frac{1}{2yd^2} \cdot B \quad (6.3-28)$$

Einsetzen von Gl. (6.3-27) und (6.3-28) in Gl. (6.3-26):

$$L^2 = \frac{4yd^4}{B^2} \cdot \frac{B^2}{4yd^2} \cdot \frac{1}{yd^2} = 1 \quad (6.3-29)$$

Gl. (6.3-8) und (6.3.13) beruhen auf der linearen Netzwerktheorie. Die Prozesse, welche für die Spannungsstabilität maßgeblich sind, werden dagegen stark durch Nichtlinearitäten determiniert. Infolgedessen zeigt der L- Index die Stabilitätsgrenze nur für einfache Netze exakt an.

6.4 Zweig-L-Index

Die Stabilitätskontrolle basiert auf Gl. (6.2-6c). Nach entsprechender Umformung ergibt sich:

$$L_{k,i} = \frac{p_{k,i}^2 + q_{k,i}^2}{u_k^4 \cdot y d_k^2} \leq 1 \quad (6.4-1)$$

$p_{k,i}^2 + q_{k,i}^2$ ist das Quadrat der Scheinleistung, welche in dem zwischen Knoten i und k befindlichen Zweig an Knoten k ankommt. $y d_k^2$ ist die für Knoten k relevante Summe aus Längs- und Queradmittanz des Zweiges (Pi-Ersatzschaltung).

Dieser Index kann auf Netze beliebiger Größe angewandt werden.

In [8] wird eine alternative Formulierung des Zweig-L-Index angegeben, welche aus der Lösung von Gl. (6.1-13) gewonnen wird. Für Spannungsquotient $f_q=0$ ergibt sich:

$$u_k^2 \cdot y d_k \cdot \sin \alpha_d + u_k \cdot u_i \cdot y_k \cdot \sin(\varphi - \alpha) + q_k = 0 \quad (6.4-2)$$

Die Lösung nach u_k lautet:

$$u_k = \frac{-u_i y_k \cdot \sin(\varphi - \alpha) \pm \sqrt{u_i^2 y_k^2 \cdot \sin^2(\varphi - \alpha) - 4 q_k \cdot y d_k \cdot \sin \alpha_d}}{2 y d_k \cdot \sin \alpha_d} \quad (6.4-3)$$

Die Stabilitätsbedingung ist durch den Klammerausdruck der Gl. (6.4-3) gegeben und lautet:

$$L_{k,i} = \frac{4 \cdot y d_k \cdot \sin \alpha_d \cdot q_k}{(u_i \cdot y_k \cdot \sin(\varphi - \alpha))^2} \leq 1 \quad (6.4-4)$$

$y_{12} = -10$

y_k ist die an Knoten k relevante Längsadmittanz des Zweiges.

Der Ausdruck $y d_k \cdot \sin \alpha_d$ stellt den am Zweigende gültigen Blindleitwert dar. Er besitzt normalerweise negatives Vorzeichen. Am Knoten k des Zweigs zufließende induktive Blindleistung ist ebenfalls mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Der Zweig-L-Index gemäß Gl (6.4-4) kann daher normalerweise nur dann größer als 1 werden, wenn durch den Zweig induktive Blindleistung von Knoten i nach Knoten k fließt.

6.5 Abschätzung der Spannungsstabilitätsgrenze mittels Determinante der Funktionalmatrix

An der Spannungsstabilitätsgrenze wird die Funktionalmatrix singulär und ihre Determinante verschwindet.

Die folgenden Ableitungen werden für spannungsabhängige Lasten durchgeführt.

Die Funktionalmatrix wird wie bei dem Funktionalmatrizenverfahren aus der Differenz $\Delta \underline{s}$ zwischen den spannungsabhängigen vorgegebenen und den berechneten Lasten gebildet:

$$[F] = - \left[\frac{\delta \Delta \underline{s}}{\delta \underline{u}} \right]$$

Für eine übersichtliche Darstellung ist es zweckmäßig die Differentiale nach u auf den Spannungsbetrag zu beziehen, sodass gilt:

$$\delta \underline{u} \rightarrow \delta \underline{u}/u \text{ bzw. } \delta \Delta \underline{s}/\delta \underline{u} \rightarrow u \cdot \delta \Delta \underline{s}/\delta \underline{u} \quad (6.5-1)$$

Für das Beispiel der Abb. 6.1-1 lautet die Funktionalmatrix somit:

$$[F] = - \begin{bmatrix} \frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} & u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \\ \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} & u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \end{bmatrix} \quad (6.5-2)$$

Mit

$$\Delta p = p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} - u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d + u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos(\varphi - \alpha) \quad (6.5-3)$$

$$\Delta q = q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d + u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \sin(\varphi - \alpha) \quad (6.5-4)$$

erhält man:

$$\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} = -u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \sin(\varphi - \alpha) = \quad (6.5-5a)$$

$$= q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d \quad (6.5-5b)$$

$$u_k \cdot \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} = fp \cdot p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} - 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d + u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos(\varphi - \alpha) = \quad (6.5-6a)$$

$$= (fp-1) \cdot p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} - u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d \quad (6.5-6b)$$

$$\frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} = u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos(\varphi - \alpha) = \quad (6.5-7a)$$

$$= -p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d \quad (6.5-7b)$$

$$u_k \cdot \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} = fq \cdot q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d + u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \sin(\varphi - \alpha) = \quad (6.5-8a)$$

$$= (fq-1) \cdot q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d \quad (6.5-8b)$$

Die Determinante lautet mit Gl. (6.5-5b), (6.5-6b), (6.5-7b), (6.5-8b):

$$\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} \cdot u_k \cdot \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} - \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} u_k \cdot \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} = \quad (6.5-9)$$

$$= \{ (q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d) \cdot ((fq-1) \cdot q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d) - \\ - (-p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} + u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d) \cdot ((fp-1) \cdot p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} - u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d) \}$$

Die **Bedingung für Spannungsinstabilität** lautet: **Determinante < 0**. Es ergibt sich daher:

$$(fp-1) \cdot p_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2fp} + (fq-1) \cdot q_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2fq} - fp \cdot p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d + fq \cdot q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d + u_k^4 \cdot y_d^2 < 0 \quad (6.5-10)$$

Betrachtet man den für die Spannungsstabilität kritischen Fall konstanter Last (Spannungsfaktoren $fp = fq = 0$), so erhält man:

$$s_n^2 = p_n^2 + q_n^2 > u_k^4 \cdot y_d^2 \quad (6.5-11a)$$

bzw.

$$s_n > u_k^2 \cdot y_d \quad (6.5-11b)$$

Es ergibt sich somit das Stabilitätskriterium gemäß Gl. (6.2-6c).

Eine zweite Formulierung der Stabilitätsgrenze ergibt sich aus Gl. (6.5-5a), (6.5-6a), (6.5-7a), (6.5-8a) zu:

$$-u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \sin(\varphi - \alpha) \cdot (fq \cdot q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} + 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d + u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \sin(\varphi - \alpha)) - \\ - [u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos(\varphi - \alpha) \cdot (fp \cdot p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} - 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d + u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos(\varphi - \alpha))] < 0$$

bzw.

$$-fp \cdot p_n \cdot (u_k/u_n)^{fp} \cdot \cos(\varphi - \alpha) - fq \cdot q_n \cdot (u_k/u_n)^{fq} \cdot \sin(\varphi - \alpha) + 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos(\varphi - \alpha + \alpha_d) - u_k \cdot u_i \cdot y < 0 \quad (6.5-12)$$

Für den Fall konstanter Last erhält man:

$$u_i \cdot y > 2 \cdot u_k \cdot y_d \cdot \cos(\varphi - \alpha + \alpha_d) : \text{instabil} \quad (6.5-13a)$$

bzw.

$$\frac{u_k}{u_i} \cdot \frac{y_d}{y} \cos(\varphi - \alpha + \alpha_d) > 0,5 : \text{stabil} \quad (6.5-13b)$$

Die Determinantenmethode ist für die Stabilitätsuntersuchung großer Netze wegen des hohen zur Bestimmung der Determinante erforderlichen Rechenaufwandes ungeeignet.

6.6 Abschätzung der Spannungsstabilitätsgrenze mit Hilfe der Eigenwerte der Funktionalmatrix

Wenn die Funktionalmatrix singulär wird, so wird einer der Eigenwerte zu 0. Die Beträge der Eigenwerte sind daher Indikatoren für das Erreichen der Spannungsstabilitätsgrenze.

Eigenwertanalyse für das Beispiel der Abb. 6.1-1:

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} - \lambda & u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \\ \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} & u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} - \lambda \end{bmatrix}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} - \lambda \right) \left(u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} - \lambda \right) - \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} = \lambda^2 - \lambda \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} + u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \right) + \frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} - \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \quad (6.6-1)$$

Lösung:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} + u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} + u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \right)^2 - \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} - \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \right)} \quad (6.6-2)$$

Aus Gl. (6.6-2) ist zu erkennen, dass bei Verschwinden der Determinante der Funktionalmatrix einer der beiden Eigenwerte zu 0 wird.

Einsetzen von Gl. (6.5-5b) bis (6.5-8b) sowie Gl. (6.5-10) ergibt:

$$\lambda = f_q \cdot q(u_k)/2 + u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d \pm \sqrt{f_q^2 \cdot q(u_k)^2/4 - (f_p - 1) \cdot p(u_k)^2 - (f_q - 1) \cdot q(u_k)^2 + f_p \cdot p(u_k) \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \cos \alpha_d - u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \cos^2 \alpha_d} \quad (6.6-3)$$

mit

$$q(u_k) = q_n \cdot (u_k/u_n)^{f_q} \quad (6.6-4)$$

$$q(u_k)^2 = q_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2f_q} \quad (6.6-5)$$

$$p(u_k) = p_n \cdot (u_k/u_n)^{f_p} \quad (6.6-6)$$

$$p(u_k)^2 = p_n^2 \cdot (u_k/u_n)^{2f_p} \quad (6.6-7)$$

Für den Sonderfall spannungsunabhängiger Last ($f_p = f_q = 0$) ergibt sich:

$$\lambda = u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d \pm \sqrt{p_n^2 + q_n^2 - u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \cos^2 \alpha_d} \quad (6.6-8)$$

Für den kritischen Fall $\lambda = 0$ erhält man nach Quadrieren von Gl. (6.6-8):

$$u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \sin^2 \alpha_d = p_n^2 + q_n^2 - u_k^4 \cdot y_d^2 \cdot \cos^2 \alpha_d \quad (6.6-9)$$

bzw.

$$p_n^2 + q_n^2 = u_k^4 \cdot y_d^2$$

Man erhält somit abermals die Grenzwertbedingung Gl. (6.2-6c).

6.7 Singulärwert Dekomposition

Das Verfahren beruht auf dem Prinzip der Eigenwertanalyse und eignet sich für Netze beliebiger Größe. Die folgende Darstellung beruht im Wesentlichen auf Lit. [7].

Die Funktionalmatrix der Dimension n (ohne Berücksichtigung des Bezugsknotens) wird gemäß Gl. 6.7-1 aufgespalten:

$$F = U \Sigma V^T = \sum_{j=1}^n \sigma_j u_j v_j^T \quad (6.7-1)$$

U und V sind orthonormale Matrizen, deren Spalten durch die Singulärvektoren u_j und v_j gebildet werden. Σ ist die Diagonalmatrix der Singulärwerte σ_j .

$$U = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \dots \\ u_{n,1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ \dots \\ u_{n,2} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \dots \\ u_{n,n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.7-2)$$

$$V^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \dots & v_{n,1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_{1,2} & v_{2,2} & \dots & v_{n,2} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} v_{1,n} & v_{2,n} & \dots & v_{n,n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.7-3)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (6.7-4)$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Singulärwerte in Σ der Größe nach geordnet sind, größter Wert an erster, kleinster an letzter Position.

Wegen der Orthonormalität gelten folgende Zusammenhänge:

$$u_j^T u_k = 0 \quad v_j^T v_k = 0 \quad (6.7-5)$$

$$u_j^T u_j = 1 \quad v_j^T v_j = 1 \quad (6.7-6)$$

Daraus folgt ferner:

$$U^T U = 1 \quad V^T V = 1 \quad (6.7-7)$$

$$U^T = U^{-1} \quad V^T = V^{-1} \quad (6.7-8)$$

Setzt man die Dekomposition gemäß Gl. (6.7-1) in $F^T F$ ein, so ergibt sich unter Anwendung von Gl. (6.7-7):

$$F^T F = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T \quad (6.7-9)$$

Aus Gl. (6.7-9) ist folgender Zusammenhang zwischen Singulärwert- und Eigenwertanalyse abzuleiten:

Wenn Matrix F den Rang r ($r \leq n$) hat, so entsprechen ihre Singulärwerte den Wurzeln der r positiven Eigenwerte der Matrix $F^T F$. Ferner enthält Matrix V die linken Eigenvektoren und V^T die rechten Eigenvektoren von $F^T F$. (Linke und rechte Eigenvektoren sind in der quadratischen Form $F^T F$ identisch).

Somit bedeutet ein kleiner Singulärwert ebenso wie ein kleiner Eigenwert der Funktionalmatrix, dass sich das System dem Spannungskollaps nahe ist.

Im Folgenden wird das linearisierte Lösungsgleichungssystem des Lastflussproblems der Singulärwert Dekomposition unterzogen:

$$\begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta u_{sp} \end{bmatrix} = [U \Sigma V^T] \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta u_{sp} \end{bmatrix} \quad (6.7-10)$$

Zur Unterscheidung vom linken Singulärvektor wird der Vektor der Knotenspannungen hier mit u_{sp} bezeichnet.

Inversion von Gl. (6.7-10) ergibt unter Verwendung von Gl. (6.7-8):

$$\begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta u_{sp} \end{bmatrix} = [V^T \Sigma^{-1} U^{-1}] \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{bmatrix} = [V \Sigma^{-1} U^T] \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{bmatrix} \quad (6.7-11)$$

Nimmt man nun die Variationen der Wirk- und Blindleistungen so vor, dass sie genau den Beträgen des n -ten linken Singulärvektors u_n entsprechen, so erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (6.7-5) und (6.7-6):

$$\begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta u_{sp} \end{bmatrix} = [V \Sigma^{-1} U^T] [u_n] = v_n \cdot \sigma_n^{-1} \quad (6.7-12)$$

Aus Gl. (6.7-12) ist abzuleiten:

- Ist der n -te Singulärwert klein, so bewirken bereits geringfügige Änderungen der Leistungen starke Änderungen der Spannungsbeträge und Spannungswinkel. Das System ist in diesem Fall instabil.
- Das Produkt aus rechtem Singulärvektor v_n und kleinstem Singulärwert ergibt einen Vektor, dessen Komponenten die kritischen Knoten des Netzes anzeigen. Kritische Knoten korrespondieren mit den größten Komponenten dieses Vektors.
- Der n -te linke Singulärvektor u_n legt die hinsichtlich Stabilität empfindlichste Richtung der Wirk- und Blindleistungsänderungen fest.

Bestimmung des kleinsten Singulärwerts und der dazu gehörenden Singulärvektoren.

Zwei Vektoren $\mathbf{s}$ und $\mathbf{r}$ werden gebildet, welche mittels Gl. (6.7-13) miteinander verknüpft sind:

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{r} \quad (6.7-13)$$

In der Singulärwertdekomposition der Gl. (6.7-13) wurde berücksichtigt, dass für die Diagonalmatrix Σ gilt:

$$\Sigma^T = \Sigma \quad (6.7-14)$$

Vektor $\mathbf{s}$ muss so initialisiert werden, dass er ähnlich dem n -ten rechten Singulärvektor $\mathbf{v}_n$ ist. Zu diesem Zweck wird er gemäß Gl. (6.7-15) angesetzt:

$$\mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \mathbf{v}_j \quad (6.7-15)$$

Man erkennt aus Gl.(6.7-15), dass $\mathbf{s}$ dann $\mathbf{v}_n$ ähnlich ist wenn der Multiplikator a_n ausreichend groß gegenüber den anderen a_j , $j \neq n$, ist.

Bildet man die Lösung von Gl. (6.7-13) und setzt hierbei $\mathbf{s}$ gemäß (6.7-14) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (6.7-8):

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{T^{-1}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{U} \Sigma^{-1} \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{s} = \mathbf{U} \Sigma^{-1} \mathbf{V}^T \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{v}_j \quad (6.7-16)$$

In Gl. (6.7-16) treten Produkte $a_j \cdot \mathbf{V}^T \mathbf{v}_j$ auf, welche wegen Gl. (6.7-5) und (6.7-6) Vektoren der Gestalt

$$a_j \cdot \mathbf{V}^T \mathbf{v}_j = a_j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.7-17)$$

ergeben. Unter Berücksichtigung dieses Zusammenhangs folgt schließlich:

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j \cdot \sigma_j^{-1} a_j \quad (6.7-18)$$

Aus Gl. (6.7-18) ist zu erkennen, dass der Vektor $\mathbf{r}$ unter folgenden Bedingungen dem Vektor $\mathbf{u}_n$ ähnlich ist:

- 1.) $\sigma_n > \sigma_j$, $j=1 \dots n-j$
- 2.) $a_n \geq a_j$, $j=1 \dots n-j$

Bedingung 1 ist implizit erfüllt, da vorausgesetzt wird, dass Singulärwerte nach fallenden Beträgen sortiert sind, siehe oben. Bedingung 2 ist bereits dann erfüllt, wenn man alle Multiplikatoren mit gleichen Werten initialisiert.

Diese Erkenntnisse ermöglichen es, Singulärwert σ_n mit den dazugehörigen Singulärvektoren iterativ zu ermitteln:

Schritt 1: Initialisierung von $\mathbf{s}$.

In [7] wird empfohlen die zu den Spannungswinkeln gehörenden Elemente von $\mathbf{s}$ auf 0 und die zu den Spannungsbeträgen gehörenden Elemente auf 1 zu setzen. Begründung: Die meisten Spannungen des Netzes tendieren nach Leistungsänderungen in dieselbe Richtung. Winkeländerungen korrelieren dagegen weniger stark und sind in der Regel bei Netzzustandsänderungen weniger stark ausgeprägt als Spannungsänderungen.

Schritt 2: Ermittlung des Vektors $\mathbf{r}$.

Zu diesem Zweck wird die transponierte Funktionalmatrix in eine obere und untere Dreiecksmatrix zerlegt und anschließend $\mathbf{r}$ mittels Vorwärts- und Rücksubstitution aus $\mathbf{s}$ bestimmt, vgl. G. (6.7-16).

Gemäß Gl. (6.7-18) ist $\mathbf{r}$ ähnlich zu $\mathbf{u}_n$ und stellt daher eine Schätzung von $\mathbf{u}_n$ dar:

$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r}$ Schätzung von $\mathbf{u}_n$

Schritt 3:

Ansatz:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{r} = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j a_j \sigma_j^{-2} \quad (6.7-19)$$

Gl. (6.7-19) ergibt sich aus ähnlichen Umformungen wie Gl. (6.7-18). Da die Singulärwerte in Gl. (6.7-19) quadratisch eingehen, wird die Richtung von $\mathbf{s}'$ noch stärker durch den Singulärvektor $\mathbf{v}_n$ determiniert als dies bei $\mathbf{r}$ in Bezug auf $\mathbf{u}_n$ der Fall war. Man hat somit eine verbesserte Richtungsanpassung erreicht.

Formal erfolgt die Lösung von Gl. (6.7-19) abermals mittels Dreieckszerlegung sowie Vorwärts- und Rücksubstitution.

Schritt 4:

Normieren von $\mathbf{s}'$, um die Beträge der Elemente in Grenzen zu halten:

$$\mathbf{s}'_{\text{norm}} = \frac{\mathbf{s}'}{\|\mathbf{s}'\|_2} \quad (6.7-20)$$

mit

$$\|\mathbf{s}'\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n s'^2} \quad (6.7-21)$$

Nächster Schritt: Wiederholen der Prozedur beginnend mit Schritt 2 unter Verwendung von $\mathbf{s}'_{\text{norm}}$ als neuen Richtungsvektor.

Nach einer hinreichend großen Anzahl von Iterationen nähern sich die Richtungen von $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}'$ so weit jenen der n -ten Singulärvektoren, dass in Gl. (6.7-18) und (6.7-19) eine weitestgehende Dominanz des n -ten Singulärwerts besteht. Es ergibt sich daher die Tendenz:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{u}_n \cdot \sigma_n^{-1} a_n \quad (6.7-22)$$

und

$$s' \rightarrow v_n \sigma_n^{-2} a_n \quad (6.7-23)$$

Aus Gl. (6.7-22) und (6.7-22) lässt sich nun der n-te Singulärwert bestimmen:

$$\frac{\|r\|_2}{\|s'\|_2} = \frac{\sigma_n^{-1} a_n \|u_n\|_2}{\sigma_n^{-2} a_n \|v_n\|_2} = \frac{\sigma_n^{-1} a_n \cdot 1}{\sigma_n^{-2} a_n \cdot 1} = \sigma_n \quad (6.7-24)$$

Die Bedingung, dass die Vektornormen in Gl. (6.7-24) zu 1 werden folgt aus Gl. (6.7-6).

Die n-ten Singulärvektoren ergeben sich, wie mittels Gl. (6.7-25) und (6.7-26) gezeigt wird, aus den normierten Richtungsvektoren r und s .

$$\frac{s'}{\|s'\|_2} = \frac{v_n \sigma_n^{-2} a_n}{\|v_n\|_2 \sigma_n^{-2} a_n} = v_n \quad (6.7-25)$$

$$\frac{r}{\|r\|_2} = \frac{u_n \sigma_n^{-1} a_n}{\|u_n\|_2 \sigma_n^{-1} a_n} = u_n \quad (6.7-26)$$

Bei der Untersuchung von Spannungsstabilitätsproblemen ist normalerweise die Sensitivität der Spannungswinkel in Bezug auf Wirkleistungsänderungen nicht relevant. Es ist daher zweckmäßig, die Wirkleistungsvariationen in Gl. (6.7-10) bzw. (6.7-11) zu 0 zu machen. Damit ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta u_{sp} \end{bmatrix} = [V \Sigma^{-1} U^T] \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta q \end{bmatrix} \quad (6.7-27)$$

Da der Vektor der Leistungsänderungen in der Singulärwertanalyse mit dem linken Singulärvektor u_n korreliert, sind auch in diesem die Elemente der Wirkleistungspartition Null zu setzen, Gl. 6.7-28). Eine analoge Maßnahme ist für den rechten Singulärvektor v_n vorzunehmen [7].

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta u_{sp} \end{bmatrix} = [V \Sigma^{-1} U^T] \begin{bmatrix} 0 \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \sigma_n^{-1} \quad (6.7-28)$$

Untersucht man Winkelstabilitätsprobleme, so setzt man an Stelle der Wirkleistungs- die Blindleistungspartitionen der n-ten Singulärvektoren auf Null, siehe Gl. (6.7-29) und (6.7-30).

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{sp} \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = [V \Sigma^{-1} U^T] \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta p \end{bmatrix} \quad (6.7-29)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{sp} \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = [V \Sigma^{-1} U^T] \begin{bmatrix} 0 \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \sigma_n^{-1} \quad (6.7-30)$$

Aus Gl. (6.7-30) ist zu erkennen, dass ein kleiner Singulärwert nun große Winkeländerungen bei kleinen Wirkleistungsänderungen signalisiert und somit ein Indikator für Winkelinstabilität ist, siehe auch Kap. 6.10.

Beispiel, System Abb. 6.1-1.

A) Formulierung der Spannungsstabilität gemäß Gl. (6.7-27).

Bei dem vorliegenden einfachen Beispiel ist die Bestimmung des Singulärwerts direkt ohne die Dekomposition gemäß Gl. (6.7-1) möglich. Zu diesem Zweck wird in die invertierte Formulierung der Gl. (6.7-27) die Funktionalmatrix gemäß Gl. (6.5-2) eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} & u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \\ \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} & u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta u_k \end{bmatrix} \quad (6.7-31)$$

Auflösen nach Δu_k (bzw. Elimination von $\Delta \varphi$) ergibt:

$$\Delta u_k = F_{qu}^{-1} \cdot \Delta q \quad (6.7-32)$$

mit

$$F_{qu} = \left(u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} - \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} \right)^{-1} u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \right) \quad (6.7-33)$$

Die Funktionalmatrix degeneriert hier zum Skalar F_{qu} . Der Eigenwert einer solchen "Matrix" ist der Skalar selbst. Da die Singulärwerte den Wurzeln der Eigenwerte von $F^T F$ entsprechen, gilt im vorliegenden Fall, dass Eigenwert Λ und Singulärwert Σ von F_{qu} identisch sind:

$$\Sigma(F_{qu}) = \sqrt{\Lambda(F_{qu}^T F_{qu})} = \sqrt{F_{qu}^2} = F_{qu} = \Lambda(F_{qu}) \quad (6.7-34)$$

An der Stabilitätsgrenze wird der Singulärwert zu 0. Somit ergibt sich folgende Stabilitätsbedingung:

$$F_{qu} = \left(u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} - \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} \right)^{-1} u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \right) \geq 0 \quad (6.7-35)$$

Eine einfache Umformung ergibt die Stabilitätsbedingung gemäß Gl. (6.5-9) bzw. (6.5-10). Man erkennt ferner, dass die gemäß Gl. (6.7-27) bzw. (6.7-19) erfolgte Reduktion auf ein Blindleistungs- Spannungsbetragsproblem direkt die in Kap. 6.5 formulierte Stabilitätsbedingung liefert.

B) Formulierung der Winkelstabilität gemäß Gl. (6.7-29).

Man geht von der invertierten Formulierung der Gl. (6.7-29) mit der Funktionalmatrix gemäß Gl. (6.5-2) aus:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} & \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} \\ u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} & \frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} \quad (6.7-36)$$

Auflösen nach $\Delta \varphi$ (bzw. Elimination von Δu_k) ergibt:

$$\Delta \varphi = F_{p\varphi}^{-1} \Delta p \quad (6.7-37)$$

mit

$$F_{p\varphi} = \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} - u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \left(u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \right)^{-1} \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} \right) \quad (6.7-38)$$

Ähnliche Überlegungen wie vorhin liefern die Stabilitätsbedingung:

$$F_{p\varphi} = \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} - u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \left(u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \right)^{-1} \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} \right) \geq 0 \quad (6.7-39)$$

Eine einfache Umformung ergibt abermals die Stabilitätsbedingung gemäß Gl. (6.5-9). Für die Untersuchung der Winkelstabilität ist es jedoch erforderlich, noch weitere Voraussetzungen zu treffen, siehe Kap. 6.10.

6.8 Stets konvergierende Lastflussrechnung

Konvergenzprobleme bei der Lastflussrechnung bewirken, dass die Spannungskorrekturen $\Delta \mathbf{s}$ (Kap. 1.2.3)

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s} - \mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathbf{s} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{Y}^* \mathbf{u}^* \quad (6.8-1)$$

nicht zu 0 werden. Bei der "stets konvergierenden Lastflussrechnung" (Kap. 2.2.5) wird dem Algorithmus ein Optimierungsverfahren überlagert, welches die Summe der Quadrate der Spannungskorrekturen Gl. (6.8-2) minimiert [3].

$$f = \Delta \mathbf{s}^t \cdot \Delta \mathbf{s} \quad (6.8-2)$$

Das Optimierungsverfahren beruht auf der Gradientenmethode [4]. Sofern sich die Zielfunktion im Verlauf der Lastflussiteration nicht stetig verringert, werden die Spannungskorrekturwerte $\Delta \mathbf{u}$ in Gl. (6.8-3) abgewichtet.

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^0 + c \cdot \Delta \mathbf{u}^1 \quad (6.8-3)$$

c Abwichtungsfaktor

Dadurch wird Divergenz vermieden, und man erhält zu mindestens eine Näherungslösung mit minimierten Leistungsresiduen $\Delta \mathbf{s}$.

Die Kontrolle der Spannungsstabilität erfolgt durch Beobachtung des Abwichtungsfaktors. Wenn dieser gegen 0 geht, so kann dies als Indikator für den Verlust der Spannungsstabilität des untersuchten Netzes interpretiert werden.

6.9 Continuation power flow

Problem:

Bestimmen des Verlaufs der Spannungsbeträge für zunehmende Last bis zum Erreichen der Spannungsstabilitätsgrenze, bzw. Bestimmen der PV- Kurven, Abb. 6.9-1. Zu diesem Zweck muss die Singularität der Funktionalmatrix mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens vermieden werden.

Lösung:

Prädiktor - Korrektor - Verfahren

1. Schritt, Prädiktor:

Von einem bekannten Lösungspunkt des Lastflussproblems wird entlang der Tangente in Richtung Spannungsstabilitätsgrenze (d.h. in Richtung steigender Last) geschritten. Der durch die Schrittweite bestimmte Endpunkt ergibt eine Schätzung für eine neue Lastflusslösung bei erhöhter Last. Siehe Abb 6.9-1.

2. Schritt, Korrektor:

Die im Prädiktorschritt gefundene Schätzung wird mit Hilfe einer Newton- Raphson Lastflussrechnung korrigiert, wodurch man den exakten Endpunkt der neuen Lösung erhält, Abb. 6.9-1.

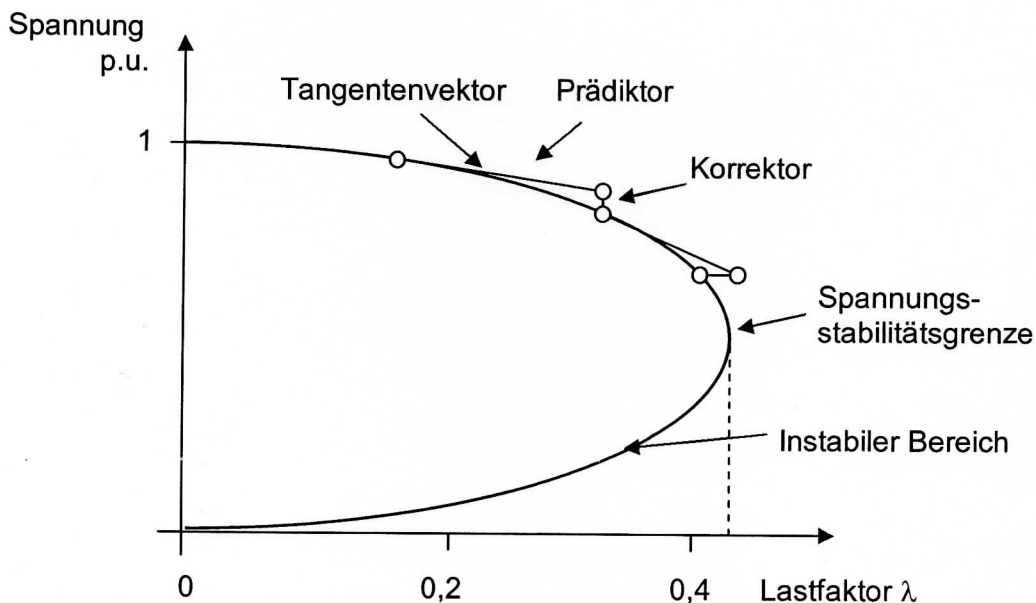


Abb. 6.9-1 Veranschaulichung des Prädiktor - Korrektor - Verfahrens

Die Lösung des Problems erfolgt iterativ mit abwechselnd aufeinanderfolgenden Prädiktor- und Korrektorschritten.

Details zum Continuation Power Flow:

Die Darstellung folgt im Prinzip [5].

Um die Last stetig variieren zu können, wird in die der Lastflussrechnung zugrunde liegenden Gleichungen der Leistungsresiduen ein Lastparameter λ eingeführt. Damit ergibt sich:

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{s} \cdot (1 + \lambda \cdot \mathbf{k}) - \mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathbf{s} \cdot (1 + \lambda \cdot \mathbf{k}) - \mathbf{U} \cdot \mathbf{Y}^* \mathbf{u}^* \quad (6.9-2)$$

$\mathbf{k}$ Vektor von Skalierungsfaktoren

λ Lastparameter, Skalar

Wie bei der gewöhnlichen Lastflussrechnung ergibt sich die Lösung von Gl. (6.9-2) bei

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (6.9-3)$$

Zu den Unbekannten $\mathbf{u}$ tritt jedoch nun der Parameter λ .

6.9.1 Prädiktorschritt

Die Taylor- Linearisierung von Gl. (6.9-3) ergibt bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}_u \cdot d\mathbf{u} + \mathbf{F}_\lambda \cdot d\lambda = \mathbf{0} \quad (6.9-4a)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_u & \mathbf{F}_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\lambda \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.9-4b)$$

$\mathbf{F}_u$ Ableitungen von $\mathbf{f}$ nach den komplexen Spannungen, entspricht der Funktionalmatrix $\mathbf{F}$, Kap. 6.5.

$\mathbf{F}_\lambda$ Ableitungen von $\mathbf{f}$ nach λ , entspricht einem Spaltenvektor

Anmerkung zu $\mathbf{F}_\lambda$:

Lasten gehen in den Vektor $\mathbf{s}$, Gl. (6.9-2), mit negativem Vorzeichen ein. Dementsprechend sind die Funktionalmatrizenelemente von $\mathbf{F}_\lambda$ für Lasten negativ. Einspeisungen besitzen in $\mathbf{s}$ positives Vorzeichen, $\mathbf{F}_\lambda$ ist daher für Einspeisungen positiv. Wenn ein Knoten j sowohl Last s_L als auch Einspeisung s_G besitzt, dann gilt für Position j :

$$F_{\lambda,j} = k_{L,j} \cdot s_{L,j} + k_{G,j} \cdot s_{G,j}, \quad s_{L,j} < 0, \quad s_{G,j} > 0.$$

Konstante Lasten oder Einspeisungen bewirken an der entsprechenden Position in $\mathbf{F}_\lambda$ eine 0.

Der Vektor

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad (6.9-5)$$

wird **Tangentenvektor** bezeichnet.

Für den Prädiktorschritt wird die Richtung zur Spannungsstabilitätsgrenze, also der Tangentenvektor benötigt. Es wird daher eine nicht triviale Lösung des Gleichungssystems (6.9-4) gesucht, welches jedoch durch die Erweiterung der Unbekannten um den Lastparameter unbestimmt ist.

Man löst dieses Problem, indem man eine Komponente des Tangentenvektors beliebig vorgibt, wobei dafür ein Wert von +1 oder -1 als zweckmäßig angesehen wird. Die mathematische Formulierung dieser Prozedur lautet, wenn man die Komponente k vorgibt:

$$\mathbf{e}_k = [0 \ 0 \ \dots \ 1_k \ \dots \ 0 \ 0] = \pm 1 \quad (6.9-6)$$

$\mathbf{e}_k$ ist ein Zeilenvektor, der an der Stelle k ein Element mit +1 enthält und sonst ausschließlich aus 0 besteht. Auf der rechten Seite wird +1 dann verwendet, wenn sich die k -te Variable im Verlauf der (Prädiktor- Korrektor-) Iteration vergrößert, andernfalls ist -1 die richtige Wahl.

Die k -te Variable, für welche die Tangentenvektorkomponente vorgegeben wurde, wird "**Continuation Parameter**" genannt.

Das um Gl. (6.9-6) erweiterte Gleichungssystem nimmt die Gestalt (6.9-7) an.

$$\begin{bmatrix} F_u & F_\lambda \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (6.9-7)$$

Sobald aus Gl. (6.9-7) die Lösung für den Tangentenvektor vorliegt, erfolgt die Prädiktion entsprechend Gl. (6.9-8).

$$\begin{bmatrix} u_p \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} du \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad (6.9-8)$$

u_a, λ_a Variable vor Prädiktorschritt

u_p, λ_p Variable nach Prädiktorschritt

c Schrittweitenfaktor, normalerweise < 1

Veranschaulichung des Prädiktorschritts für das einfache System laut Abb. 6.1-1, siehe Abb. 6.9-2.

Nur u und λ , keine φ werden berücksichtigt. Im Tangentenvektor nimmt Spannung u_k die erste Position und λ die zweite Position ein.

a) Wahl von λ als Continuation Parameter

Es wird gesetzt: $e_1 = 0, e_2 = 1, t_2 = +1$ da λ zunimmt. Aus Gl. (6.9-7)

$$\begin{bmatrix} F_u & F_\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

bzw. aus der 2. Gleichung folgt:

$$0 + 1 \cdot d\lambda = +1 \rightarrow d\lambda = 1$$

Aus der 1. Gleichung mit $F_u = df/du, F_\lambda = df/d\lambda$:

$$(df/du) \cdot du + (df/d\lambda) \cdot d\lambda = 0$$

$$du = -(df/du)^{-1} \cdot (df/d\lambda) \cdot d\lambda = -du/df \cdot (df/d\lambda) \cdot d\lambda = -(du/d\lambda) \cdot d\lambda \rightarrow du = - (du/d\lambda) \cdot 1$$

b) Wahl von u als Continuation Parameter

Es wird gesetzt: $e_1 = 1, e_2 = 0, t_1 = -1$ da u abnimmt. Aus Gl. (6.9-7)

$$\begin{bmatrix} F_u & F_\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

bzw. aus der 2. Gleichung folgt:

$$1 \cdot du + 0 = -1 \rightarrow du = -1$$

Aus der 1. Gleichung:

$$d\lambda = -(df/d\lambda)^{-1} \cdot (df/du) \cdot du = -(d\lambda/du) \cdot du \rightarrow d\lambda = +(d\lambda/du) \cdot 1$$

6.9.2 Wahl des continuation parameters

Als continuation parameter sollte die Variable mit der größten Tangentenvektorkomponente aus $\mathbf{t}$ gewählt werden.

Die Iteration sollte bei nicht zu hoher Netzlast starten. Im Startpunkt werden dann die Spannungen nur wenig von Leistungsänderungen beeinflusst.

Im Startpunkt gilt daher:

$(du/d\lambda) \ll \rightarrow du < d\lambda$, vgl. Abb. 6.9-2, Fall a)

Es ist daher zweckmäßig, die Iteration mit λ als continuation parameter zu starten.

Nähert man sich der Stabilitätsgrenze, so werden die Spannungsänderungen in Relation zu Leistungsänderungen groß, vgl. Abb. 6.9-2, Fall a), sodass dann in der Regel nicht mehr λ , sondern eine andere Variable einen geeigneten Kandidaten für den continuation parameter darstellt.

Nahe der Stabilitätsgrenze gilt daher, Abb. 6.9-2, Fall b):

$(du/d\lambda) \gg, (d\lambda/du) \ll \rightarrow d\lambda < du$.

Nahe der Stabilitätsgrenze ist daher u als continuation parameter zu verwenden.

Der continuation parameter ist folglich in jedem Schritt der Iteration neu zu bestimmen.

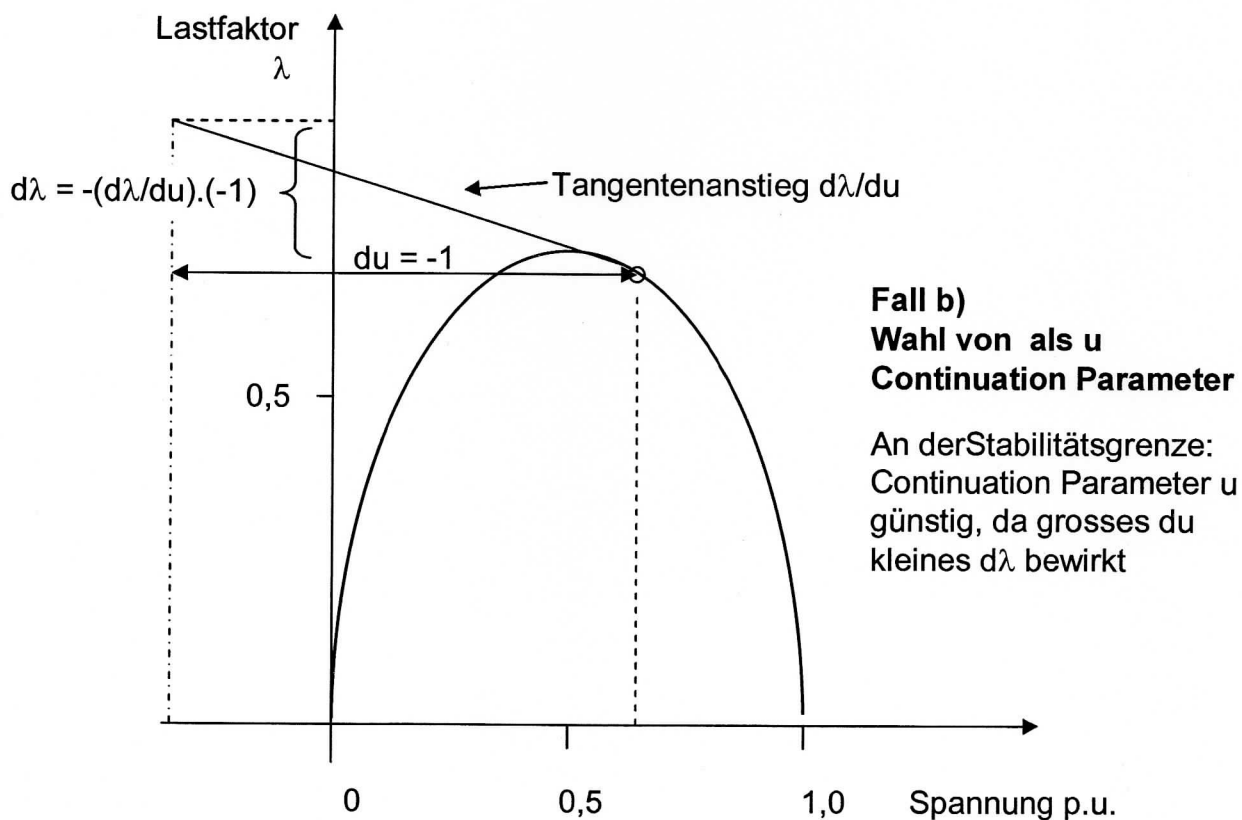
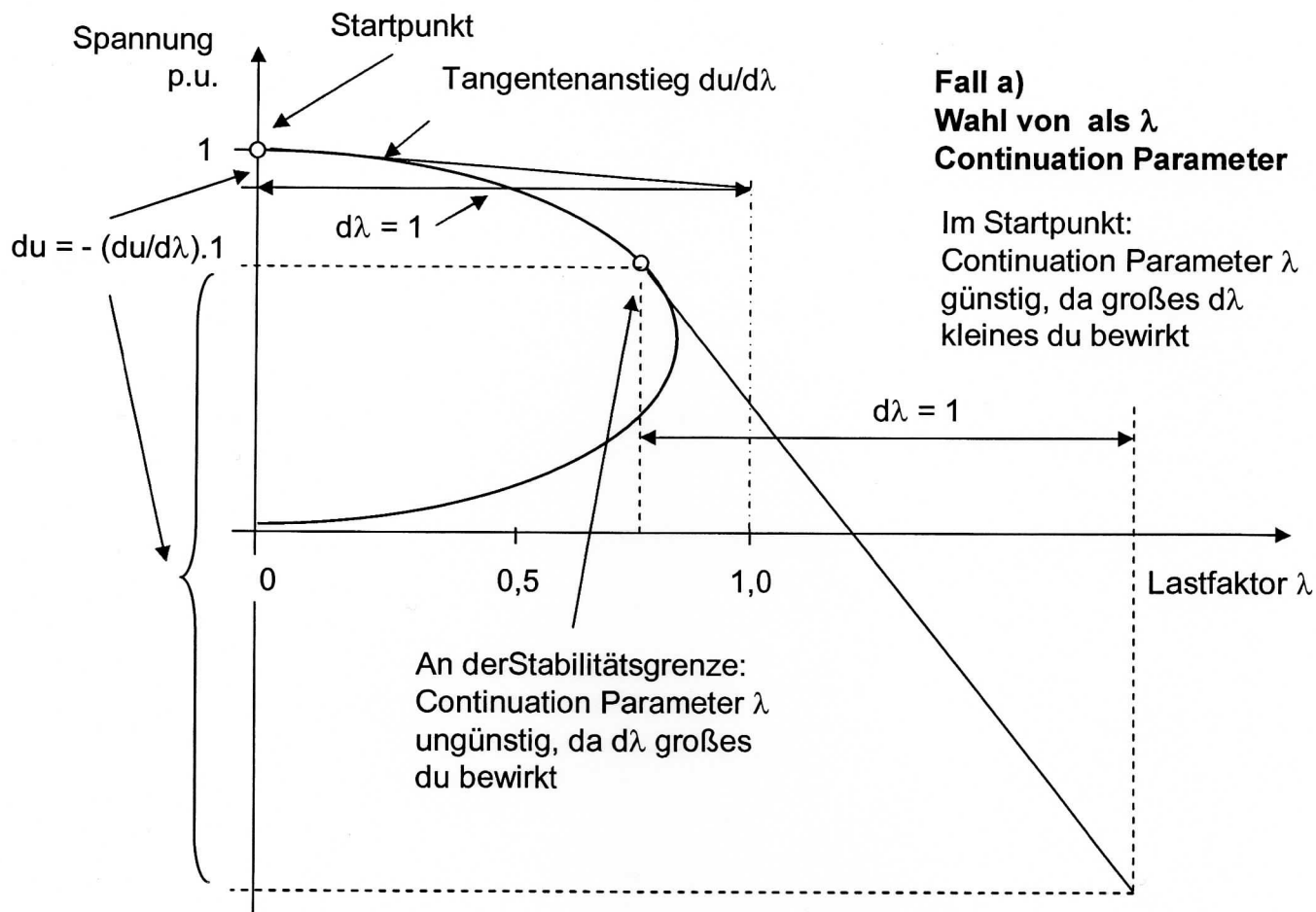


Abb. 6.9-2 Veranschaulichung des Prädiktorschritts für den Startpunkt und für einen Punkt nahe der Spannungsstabilitätsgrenze

6.9.3 Korrektorschritt

Der Korrektorschritt erfolgt mit Hilfe einer Lastflussrechnung mit dem erweiterten Variablensatz

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Ebenso wie bei der Prädiktion wird das entsprechende Gleichungssystem um eine Gleichung erweitert, um es lösen zu können. Diese Gleichung gehört zu jener Variablen, deren Tangentenvektorkomponente im Prädiktorschritt vorgegeben wurde. Wurde beispielsweise die k-te Komponente in $\mathbf{t}$ vorgegeben, vgl. Gl. (6.9-6), dann wird nach Lösung von (6.9-8) aus den Resultaten

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \lambda_p \end{bmatrix}$$

das k-te Element $x_{p,k}$ entnommen und als bekannte Größe vorgegeben, wodurch ein zusätzliches Gleichungssystem entsteht, welches lautet:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{p,k} \quad , \quad (6.9-9)$$

sodass man letztlich folgendes erweitertes Lastflussgleichungssystem erhält:

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{u}, \lambda) \\ 0, 0, \dots, x_k - x_{p,k}, \dots, 0, 0 \end{bmatrix} = [0] \quad (6.9-10)$$

Die Lösung erfolgt wie bei der klassischen Lastflussrechnung nach dem Newton- Raphson-Verfahren. Die zusätzliche Gleichung ergibt in der Funktionalmatrix eine zusätzliche Zeile, in der sämtliche Elemente außerhalb der Diagonale 0 sind, während das Diagonalelement 1 beträgt. Die Spalte $\mathbf{F}_\lambda$, vgl. Gl. (6.9-7) ist auch hier enthalten.

Da x_k auf dem Wert $x_{p,k}$ festgehalten werden soll, kann man auch, statt das Gleichungssystem zu erweitern, im Vektor $\mathbf{x}$ das k-te Element und in der Funktionalmatrix die k-te Spalte streichen. In beiden Fällen ergibt sich an der Spannungsstabilitätsgrenze eine nicht singuläre Funktionalmatrix, sodass die Lösung ohne Konvergenzprobleme möglich ist.

6.9.4 Bestimmung der Spannungsstabilitätsgrenze

Betrachtet man die der PV- Kurve Abb. 6.9-1, so erkennt man, dass der Lastfaktor λ vor der Stabilitätsgrenze zunimmt, danach abnimmt. Die Tangentenkomponente $d\lambda$ ist daher an der Stabilitätsgrenze 0, davor >0 und danach <0 . Der Wechsel des Vorzeichens von $d\lambda$ zeigt folglich die Stabilitätsgrenze an.

6.9.5 Bestimmung kritischer Knoten

Unter kritischen Knoten versteht man jene Netzknoten, welche sich nahe an der Spannungsstabilitätsgrenze befinden und daher gefährdet sind, den Spannungskollaps zu erleiden.

Da das Verhältnis du/ds in der Nähe der Spannungsstabilitätsgrenze stark ansteigt, können kritische Knoten identifiziert werden, indem man dieses Verhältnis individuell für jeden Knoten bestimmt. Da sich die einzelnen Lasten unterschiedlich auf die einzelnen Spannungen auswirken können, bezieht man den Spannungsgradienten auf die gesamte Systemlast. Somit gilt:

$$dp_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n dp_{L,i} = \sum_{i=1}^n p_{L,i} \cdot k_{L,i} \cdot d\lambda = CP \cdot d\lambda \quad (6.9-11)$$

$$du_j/dp_{\text{total}} = \frac{1}{CP} \cdot du_j/d\lambda \quad (6.9-12)$$

Da die Größe CP für alle Knoten gleich ist, entsprechen die kritischen Knoten jenen Elementen du_j im Tangentenvektor, welche den größten Betrag besitzen:

$$\text{Kritische Knoten: Max } \left[- \frac{1}{CP} \cdot du_j/d\lambda \right] \quad (6.9-13)$$

In Gl. (6.9-13) und (6.9-14) dient das negative Vorzeichen dazu, die Vorzeichen der Differentiale $du_j/d\lambda$, welche vor Erreichen der Stabilitätsgrenze negativ sind, umzukehren.

Auf analoge Art und Weise wird die Empfindlichkeit der Knotenspannungen in Bezug auf die Blindleistung bestimmt:

$$\text{Kritische Knoten: Max } \left[- \frac{1}{CQ} \cdot du_j/d\lambda \right] \quad (6.9-14)$$

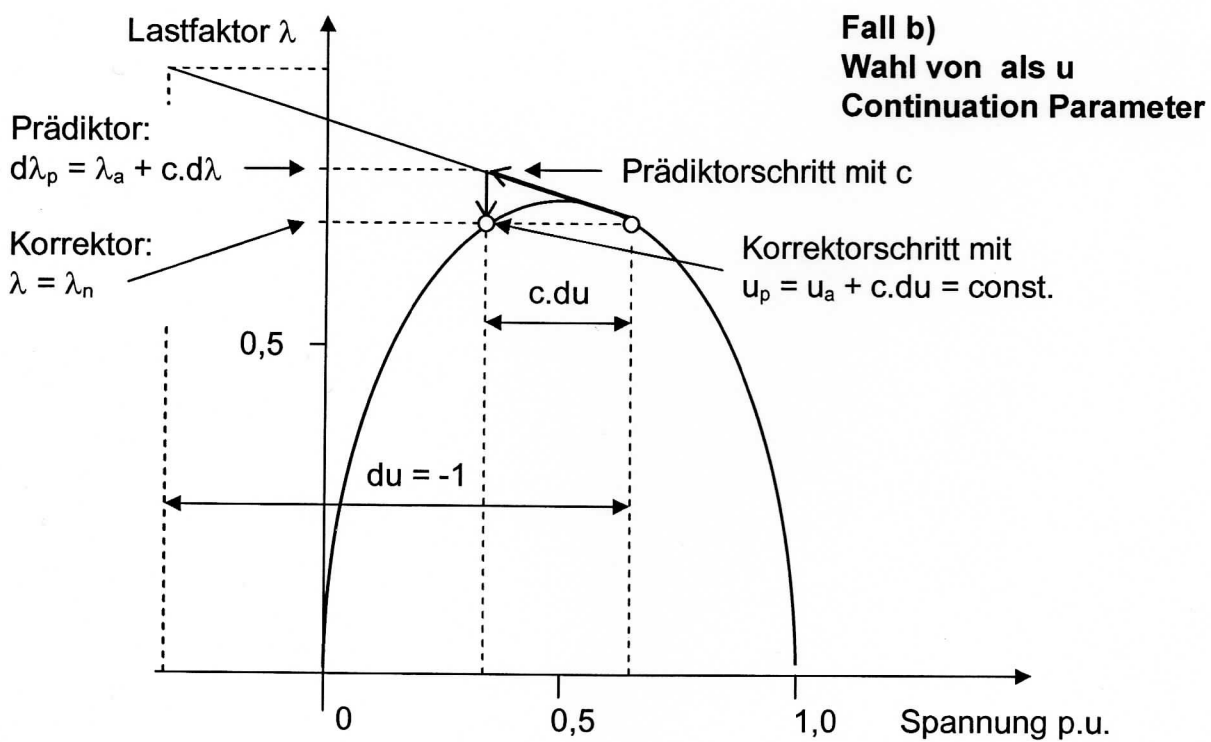
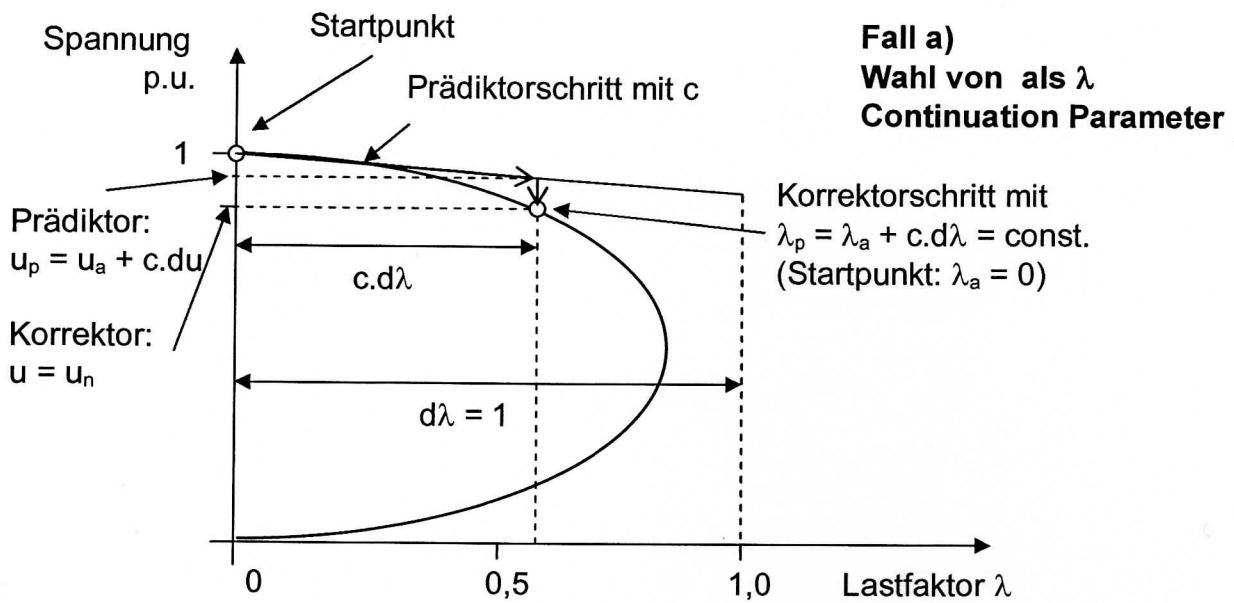


Abb. 6.9-3 Veranschaulichung des Korrektorschritts für den Startpunkt und für einen Punkt nahe der Spannungsstabilitätsgrenze

6.10. Lastflusslösung mit Spannungsstützung, Spannungswinkelstabilität

Prinzip:

Ein Kollabieren der Spannung wird verhindert, indem man die Spannung im Lastknoten durch eine Zusatzeinspeisung stützt. Da die Spannung primär durch die Blindleistung beeinflusst wird, erfolgt die Spannungsstützung vorwiegend durch Blindleistungseinspeisung, Abb. 6.10-1.

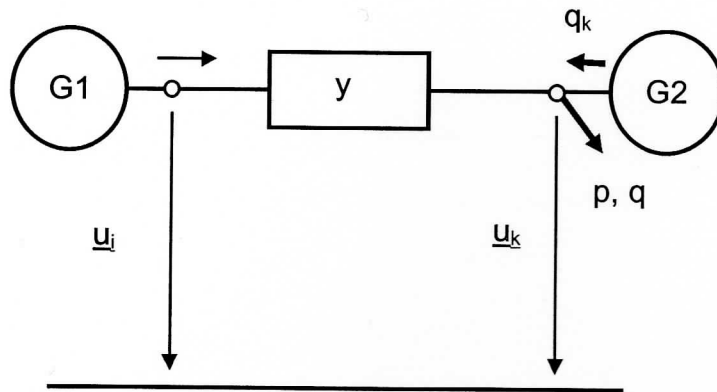


Abb. 6.10-1 Spannungsstützung durch Blindleistungseinspeisung

Blindleistungserzeugung erfolgt durch Kondensatoren, Phasenschieber oder leistungselektronische Elemente (FACTS).

In Gl. (6.1-16) wird nun die Spannung u_k festgehalten und die Blindleistung zur abhängigen Größe gemacht. Es ergibt sich für $p_f = q_f = 0$:

$$D = 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot \sin \alpha_d \quad (6.10-1)$$

$$E = p^2 + u_k^4 \cdot y_d^2 - u_k^2 \cdot u_i^2 \cdot y^2 - 2 \cdot u_k^2 \cdot y_d \cdot p \cdot \cos \alpha_d \quad (6.10-2)$$

$$q^2 + D \cdot q + E = 0 \quad (6.10-3)$$

Beispiel für $\alpha = -90^\circ$ und $u_k = u_i \cdot y_d = y$:

$$D = -2 \cdot u_i^2 \cdot y \quad (6.10-4)$$

$$E = p^2 \quad (6.10-5)$$

$$q = u_i^2 \cdot y \pm \sqrt{u_i^4 \cdot y^2 - p^2} \quad (6.10-6)$$

Annahme: $p^2 = 0,2 \cdot u_i^4 \cdot y^2$

1. Lösung:

$$q = u_i^2 \cdot y - 0,9 \cdot u_i^2 \cdot y = 0,1 \cdot u_i^2 \cdot y \quad (\text{kapazitiv})$$

Aus Gl. (6.1-13) mit $p_f = 0$, $\alpha = -90^\circ$:

$$q = u_k^2 \cdot y - u_k \cdot u_i \cdot y \cdot \cos \varphi \quad (6.10-7)$$

Mit $u_k = u_i$:

$$0,1 \cdot u_i^2 \cdot y = u_i^2 \cdot y - u_i^2 \cdot y \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 0,9; \quad \varphi = 25,8^\circ$$

2. Lösung:

$$q = u_i^2 \cdot y + 0,9 \cdot u_i^2 \cdot y = 1,9 \cdot u_i^2 \cdot y \quad (\text{kapazitiv})$$

Aus Gl.(6.1-13):

$$1,9 \cdot u_i^2 \cdot y = u_i^2 \cdot y - u_i^2 \cdot y \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = -0,9; \quad \varphi = 154,2^\circ$$

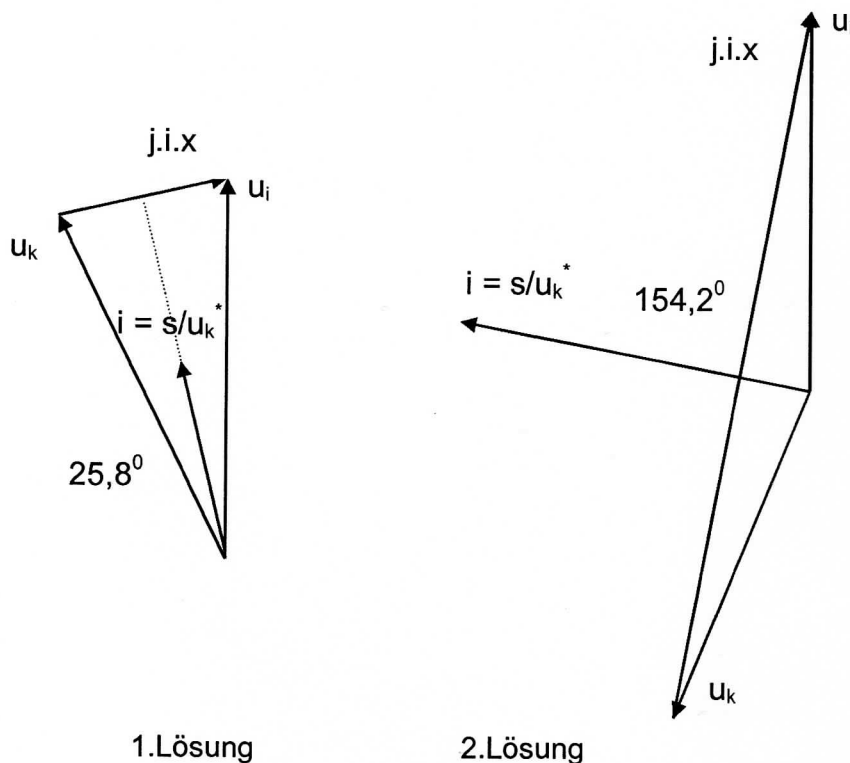


Abb. 6.10-1 Zeigerdiagramme für verlustloses Übertragungssystem bei Betrieb mit Spannungsstützung durch Blindleistungseinspeisung

In der 2. Lösung nimmt die Blindleistung beinahe den doppelten Betrag der Kurzschlussleistung $s_k = u_i^2 \cdot y$ an. Der Strom wird daher unzulässig hoch.

Überprüfung der Winkelstabilität (statische Stabilität der Energieübertragung):

Man geht von der Stabilitätsbedingung Gl. (6.7-39) aus:

$$F_{p\varphi} = \left(\frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} - u_k \frac{\delta \Delta p}{\delta u_k} \left(u_k \frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \right)^{-1} \frac{\delta \Delta q}{\delta \varphi} \right) \geq 0 \quad (6.7-39)$$

Da Spannungsstützung durch Einspeisung von Blindleistung in theoretisch unbegrenzter Menge erfolgt, kann die Sensitivität des Spannungsbetrags bezüglich der Blindleistung zu Null angesetzt werden:

$$\frac{\delta u_k}{\delta \Delta q} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\delta \Delta q}{\delta u_k} \right)^{-1} = 0 \quad (6.10-8)$$

Damit reduziert sich das Stabilitätskriterium auf:

$$F_{p\varphi} = \frac{\delta \Delta p}{\delta \varphi} \geq 0 \quad (6.10-9)$$

bzw. mit Gl. (6.5-5a):

$$-u_i \cdot u_k \cdot y \cdot \sin(\varphi - \alpha) \geq 0 \text{ stabil} \quad (6.10-10)$$

In Gl. (6.10-10) ist das Vorzeichen des Übertragungswinkels φ bei Leistungslieferung von Knoten i nach k negativ einzusetzen.

Für den Fall des verlustlosen Übertragungssystems gilt mit $\alpha = -90^\circ$:

$$u_i \cdot u_k \cdot y \cdot \cos(\varphi) \geq 0 \text{ stabil} \quad (6.10-11)$$

$$\text{Die Stabilitätsgrenze liegt daher bei } \cos\varphi_{\text{stab}} = 0, \varphi_{\text{stab}} = 90^\circ. \quad (6.10-12)$$

Veranschaulichung des Stabilitätskriteriums:

Generator 1 (Abb. 6.10-1) liefert Wirkleistung p. Im Stationärzustand gilt:

$$p_m = p_G \quad (6.10-13)$$

bzw.

$$\Delta p = p_G - p_m = 0 \quad (6.10-14)$$

p_m Mechanische Antriebsleistung

p_G Abgegebene elektrische Leistung

Die Wirkleistung an Knoten i (Generator 1) lautet unter der Berücksichtigung dass gilt

$$\varphi = \varphi_i - \varphi_k \quad (6.10-15)$$

mit Gl. (6.1-12), $f_p=0$, $\alpha = -90^\circ$:

$$p_G = u_i \cdot u_k \cdot y \cdot \sin\varphi \quad (6.10-16)$$

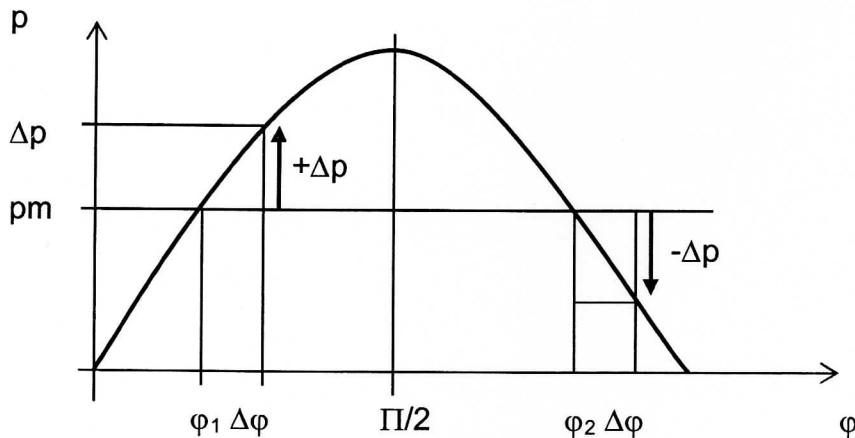


Abb. 6.10-2 Wirkleistung in Abhängigkeit vom Übertragungswinkel φ für ein verlustloses Übertragungssystem mit stabilem Arbeitspunkt φ_1 und instabilem Arbeitspunkt φ_2

Wenn eine positive Winkelauslenkung $d\varphi > 0$ eine Erhöhung der elektrischen Leistung p_G bewirkt, so entspricht dies einer Erhöhung des Leistungsbedarfs des Generators. Bei unveränderter mechanischer Antriebsleistung p_m entsteht dadurch ein Mangel an Antriebsleistung und damit verbunden eine Reduktion der Drehzahl ($\omega = d\varphi/dt$). Der Maschinensatz wird somit verzögert und die Winkelauslenkung verringert. Das System kehrt daher in den ursprünglichen Arbeitspunkt φ_1 zurück.

Wenn dagegen eine positive Winkelauslenkung eine Verringerung der elektrischen Leistung bewirkt, so entsteht ein Überschuss an mechanischer Antriebsleistung und die Winkelauslenkung wird weiter vergrößert. Dadurch wird der Generator asynchron und muss abgeschaltet werden.

Das Energieübertragungssystem ist daher stabil wenn gilt:

$$\frac{\delta \Delta p_G}{\delta \varphi} \geq 0,$$

was dem Stabilitätskriterium der Gl. (6.10-9) entspricht.

Bedingung (6.10-12) gilt nur für ein einfaches Generatormodell und verlustloses Übertragungssystem. Bei verlustbehafteten Übertragungssystemen ist φ_{stab} , wie aus Gl. (6.10-10) folgt, kleiner als 90° .

6.11 Schrifttum

- [1] Theil, G.: Stationäre Analyseverfahren für elektrische Energienetze; Vorlesungsskriptum. Technische Universität Wien, Institut für elektrische Anlagen und Energiewirtschaft.
- [2] Miksovsky, E.: Berechnung der Transitzkapazität von Übertragungsnetzen. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, Institut für elektrische Anlagen und Energiewirtschaft, 1999.
- [3] Hartkopf, Th.: Ein modifiziertes Newton Verfahren für stets konvergierende Lastflussiterationen. ETZ-A Bd. 98(1977), Heft 9.
- [4] Dommel, H.W., Tinney, W.F.: Optimal power flow solutions. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 87 (1968), No.12.
- [5] Ajjarapu, V.; Christy, C.: The continuation power flow: A tool for steady state voltage stability analysis. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7 (1992), No.1, pp. 416 - 423.
- [6] P. Kessel, H. Glavitsch: Estimating the voltage stability of a power system. IEEE Transactions on Power Delivery, vol PWRD-1, No.3, July 1986, pp.346 – 354.
- [7] P.-A. Löf, T. Smed, G. Andersson, D.J. Hill: Fast calculation of a voltage stability index. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, No. 1, Feb. 1992, pp. 54 – 64.
- [8] M. Moghavvemi, M.O. Faruque: Power system security and voltage collapse: a line outage based indicator for prediction. Electrical Power and Energy Systems 21 (1999) 455 – 461.