A meshfree CSRBF–ETDRDP scheme for solving systems of semilinear parabolic partial differential equations

Ibraheem Abiodun Yahayah[a], Emmanuel Asante-Asamani[a,*], Guangming Yao[a]

[a] *Clarkson University, 8 Clarkson Avenue, Potsdam, 13699, NY, USA*

Supplementary material

Method	N_{interior}	h	Δt	ϵ	E_∞		E_{RMS}		Time (s)
					Error	EOC	Error	EOC	
ERK2	144	0.0800	0.00005	1.40	3.93×10^{-4}	–	2.12×10^{-4}	–	0.4157
	576	0.0400	0.000025	1.40	2.45×10^{-4}	0.68	1.24×10^{-4}	0.78	8.9295
	2401	0.0200	0.0000125	1.40	1.39×10^{-4}	0.82	6.94×10^{-5}	0.83	339.3628
	9801	0.0100	0.00000625	1.40	6.27×10^{-5}	1.14	3.11×10^{-5}	1.16	12243.6355

Table S1: Convergence table of the CSRBF-ERK2 scheme for the model test problem in Example 5.2 at final time $T = 1$.

ϵ	N_{interior}	h	Δt	E_∞		E_{RMS}		Time (s)
				Error	EOC	Error	EOC	
1.30	25	0.1600	0.000010	6.06×10^{-4}	–	3.29×10^{-4}	–	0.8844
	144	0.0800	0.000005	7.96×10^{-4}	-0.39	3.44×10^{-4}	-0.07	9.2074
	576	0.0400	0.0000025	2.03×10^{-4}	1.97	7.30×10^{-5}	2.24	214.5908
	2401	0.0200	0.00000125	3.77×10^{-5}	2.43	1.09×10^{-5}	2.74	6649.0922
1.40	25	0.1600	0.000010	2.76×10^{-3}	–	2.02×10^{-3}	–	0.8717
	144	0.0800	0.000005	1.79×10^{-4}	3.95	5.78×10^{-5}	5.13	9.1851
	576	0.0400	0.0000025	1.00×10^{-4}	0.84	5.21×10^{-5}	0.15	213.0793
	2401	0.0200	0.00000125	2.25×10^{-5}	2.15	1.03×10^{-5}	2.34	6623.3359

Table S2: Convergence table of the CSRBF-ERK2 scheme for the model test problem in Example 5.4 at final time $T = 1$.

*easantea@clarkson.edu

ϵ	N_{interior}	h	Δt	E_∞		E_{RMS}		Time (s)
				Error	EOC	Error	EOC	
0.60	144	0.0800	0.1000	3.80×10^{-1}	–	1.61×10^{-1}	–	0.0483
	576	0.0400	0.0500	9.42×10^{-2}	2.01	3.86×10^{-2}	2.06	0.3780
	2401	0.0200	0.0250	3.23×10^{-2}	1.54	1.30×10^{-2}	1.57	10.7774
	9801	0.0100	0.0125	1.20×10^{-2}	1.42	4.70×10^{-3}	1.47	741.6030
1.00	144	0.0800	0.1000	3.47×10^{-2}	–	1.50×10^{-2}	–	0.0391
	576	0.0400	0.0500	1.40×10^{-2}	1.31	5.76×10^{-3}	1.38	0.2554
	2401	0.0200	0.0250	5.49×10^{-3}	1.35	2.19×10^{-3}	1.40	10.8651
	9801	0.0100	0.0125	2.16×10^{-3}	1.35	8.24×10^{-4}	1.41	754.7690
1.30	144	0.0800	0.1000	5.46×10^{-3}	–	2.24×10^{-3}	–	0.0531
	576	0.0400	0.0500	2.20×10^{-3}	1.31	8.42×10^{-4}	1.41	0.2114
	2401	0.0200	0.0250	8.35×10^{-4}	1.40	3.02×10^{-4}	1.48	10.6614
	9801	0.0100	0.0125	3.24×10^{-4}	1.36	1.09×10^{-4}	1.47	772.0622
1.40	144	0.0800	0.1000	8.71×10^{-4}	–	2.02×10^{-4}	–	0.0596
	576	0.0400	0.0500	2.22×10^{-4}	1.97	4.15×10^{-5}	2.28	0.2709
	2401	0.0200	0.0250	8.43×10^{-5}	1.40	3.39×10^{-5}	0.29	11.0576
	9801	0.0100	0.0125	4.60×10^{-5}	0.87	2.05×10^{-5}	0.72	749.7917
1.60	144	0.0800	0.1000	4.77×10^{-3}	–	2.36×10^{-3}	–	0.0543
	576	0.0400	0.0500	2.47×10^{-3}	0.95	1.10×10^{-3}	1.09	0.4100
	2401	0.0200	0.0250	1.15×10^{-3}	1.11	4.86×10^{-4}	1.18	11.3426
	9801	0.0100	0.0125	4.93×10^{-4}	1.22	2.01×10^{-4}	1.27	765.0656
1.80	144	0.0800	0.1000	7.05×10^{-3}	–	3.45×10^{-3}	–	0.0583
	576	0.0400	0.0500	3.77×10^{-3}	0.90	1.66×10^{-3}	1.06	0.4356
	2401	0.0200	0.0250	1.77×10^{-3}	1.09	7.29×10^{-4}	1.18	11.0265
	9801	0.0100	0.0125	7.66×10^{-4}	1.21	3.01×10^{-4}	1.27	818.1619

Table S3: Effect of support radius ϵ on the accuracy and convergence of the ETDRDP scheme for the model test problem in Example 5.2.

ϵ	N_{interior}	h	Δt	E_∞		E_{RMS}		Time (s)
				Error	EOC	Error	EOC	
0.60	25	0.1600	0.0080	2.36×10^{-2}	–	1.23×10^{-2}	–	0.0491
	144	0.0800	0.0040	1.41×10^{-2}	0.74	5.38×10^{-3}	1.19	0.0610
	576	0.0400	0.0020	4.00×10^{-3}	1.82	2.12×10^{-3}	1.34	2.0406
	2401	0.0200	0.0010	9.25×10^{-4}	2.11	4.89×10^{-4}	2.12	101.2198
1.00	25	0.1600	0.0080	8.59×10^{-3}	–	3.89×10^{-3}	–	0.0490
	144	0.0800	0.0040	2.77×10^{-3}	1.63	9.85×10^{-4}	1.98	0.0642
	576	0.0400	0.0020	7.98×10^{-4}	1.80	4.44×10^{-4}	1.15	2.0069
	2401	0.0200	0.0010	1.52×10^{-4}	2.39	8.27×10^{-5}	2.43	101.0348
1.30	25	0.1600	0.0080	1.07×10^{-3}	–	5.99×10^{-4}	–	0.0978
	144	0.0800	0.0040	5.32×10^{-4}	1.01	1.36×10^{-4}	2.14	0.0950
	576	0.0400	0.0020	1.33×10^{-4}	2.00	3.81×10^{-5}	1.84	2.7414
	2401	0.0200	0.0010	2.96×10^{-5}	2.17	1.43×10^{-5}	1.42	99.9925
1.40	25	0.1600	0.0080	1.72×10^{-3}	–	1.33×10^{-3}	–	0.0403
	144	0.0800	0.0040	3.94×10^{-4}	2.12	2.09×10^{-4}	2.67	0.0606
	576	0.0400	0.0020	2.30×10^{-4}	0.78	1.19×10^{-4}	0.81	2.0417
	2401	0.0200	0.0010	6.36×10^{-5}	1.85	3.24×10^{-5}	1.88	99.9597
1.60	25	0.1600	0.0080	4.61×10^{-3}	–	2.80×10^{-3}	–	0.0395
	144	0.0800	0.0040	8.05×10^{-4}	2.52	4.86×10^{-4}	2.53	0.0615
	576	0.0400	0.0020	4.60×10^{-4}	0.81	2.44×10^{-4}	1.00	2.0181
	2401	0.0200	0.0010	1.11×10^{-4}	2.05	5.72×10^{-5}	2.09	100.4312
1.80	25	0.1600	0.0080	6.41×10^{-3}	–	3.68×10^{-3}	–	0.0402
	144	0.0800	0.0040	1.07×10^{-3}	2.58	6.39×10^{-4}	2.52	0.0603
	576	0.0400	0.0020	5.86×10^{-4}	0.87	3.11×10^{-4}	1.04	2.0565
	2401	0.0200	0.0010	1.36×10^{-4}	2.11	7.05×10^{-5}	2.14	100.1289

Table S4: Effect of support radius ϵ on the accuracy and convergence of the ETDRDP scheme for the model test problem in Example 5.4.

Numerical Performance Comparison for the Burgers Equation ($T = 1, N = 900$)					
Re	ϵ	MAE	Method	Δt	CPU Time (s)
50	0.175	3.10×10^{-1}	ETD	0.0833	1.1112
			ERK	0.0045	1.0012
			CN	0.1000	4.2642
	0.35	1.56×10^{-2}	ETD	0.0833	1.3903
			ERK	0.0044	1.2305
			CN	0.1000	3.5690
	0.7	3.35×10^{-3}	ETD	0.0500	2.0299
			ERK	0.0044	1.9516
			CN	0.1000	4.5603
	1.4	6.50×10^{-4}	ETD	0.0167	2.1218
			ERK	0.0044	1.8853
			CN	0.1000	4.2070
100	0.175	1.76×10^{-1}	ETD	0.0500	1.1975
			ERK	0.0093	0.7249
			CN	0.1000	4.2682
	0.35	1.65×10^{-2}	ETD	0.0417	1.4984
			ERK	0.0089	1.0289
			CN	0.1000	4.0133
	0.7	3.55×10^{-3}	ETD	0.0417	2.0880
			ERK	0.0089	1.6239
			CN	0.1000	4.9318
	1.4	1.30×10^{-3}	ETD	0.0125	2.3082
			ERK	0.0089	1.7054
			CN	0.1000	4.8529

Table S5: Efficiency of ETD, ERK, and CN schemes for $Re = 50, 100$.

Numerical Performance Comparison for the Burgers Equation (Continued)					
Re	ϵ	MAE	Method	Δt	CPU Time (s)
200	0.175	9.00×10^{-2}	ETD	0.0313	1.1724
			ERK	0.0185	0.5221
			CN	0.0167	19.9458
	0.35	1.70×10^{-2}	ETD	0.0313	1.4636
			ERK	0.0185	0.7951
			CN	0.0625	5.9202
	0.7	6.00×10^{-3}	ETD	0.0313	2.0690
			ERK	0.0185	1.4301
			CN	0.1000	5.5060
	1.4	4.00×10^{-3}	ETD	0.0313	2.1346
			ERK	0.0185	1.4392
			CN	0.1000	5.1385
400	0.175	7.03×10^{-2}	ETD	0.0143	1.3229
			ERK	0.0167	0.5392
			CN	0.0714	6.6292
	0.35	2.24×10^{-2}	ETD	0.0200	1.4980
			ERK	0.0200	0.7968
			CN	0.0714	6.9398
	0.7	1.40×10^{-2}	ETD	0.0250	2.0994
			ERK	0.0250	1.3938
			CN	0.0625	7.6879
	1.4	1.20×10^{-2}	ETD	0.0200	2.1617
			ERK	0.0217	1.3674
			CN	0.0625	7.7056

Table S6: Efficiency of ETD, ERK, and CN schemes for $Re = 200, 400$.

Collocation Points (N) Variation Performance for Burgers Equation ($T = 1, \epsilon = 0.4$)					
Re	N	MAE	Method	Δt	CPU Time (s)
50	100	1.33×10^{-1}	ETD	0.0500	0.0143
			ERK	0.0500	0.0325
			CN	0.1000	0.1231
	400	2.91×10^{-2}	ETD	0.0500	0.1720
			ERK	0.0100	0.1473
			CN	0.1000	0.7620
	900	1.18×10^{-2}	ETD	0.0500	1.5843
			ERK	0.0044	1.3981
			CN	0.1000	5.0567
	1600	5.99×10^{-3}	ETD	0.0500	8.3331
			ERK	0.0024	7.6648
			CN	0.1000	18.7295
100	100	1.20×10^{-1}	ETD	0.0500	0.0098
			ERK	0.0500	0.0071
			CN	0.0625	0.0798
	400	3.05×10^{-2}	ETD	0.0250	0.2292
			ERK	0.0200	0.1855
			CN	0.0500	1.1862
	900	1.24×10^{-2}	ETD	0.0250	1.6567
			ERK	0.0089	1.0570
			CN	0.0500	7.4173
	1600	6.30×10^{-3}	ETD	0.0250	8.7745
			ERK	0.0048	5.8231
			CN	0.0500	31.8748

Table S7: Comparison of numerical schemes under collocation points variation ($Re = 50, 100$) for $\epsilon = 0.4$.

Collocation Points (N) Variation Performance (Continued)					
Re	N	MAE	Method	Δt	CPU Time (s)
200	100	1.52×10^{-1}	ETD	0.0500	0.0288
			ERK	0.0625	0.0430
			CN	0.1000	0.0843
	400	3.15×10^{-2}	ETD	0.0250	0.2361
			ERK	0.0333	0.1233
			CN	0.0500	1.3778
	900	1.27×10^{-2}	ETD	0.0250	1.5791
			ERK	0.0167	0.9435
			CN	0.0500	8.7185
	1600	6.52×10^{-3}	ETD	0.0250	8.6837
			ERK	0.0091	4.6993
			CN	0.0500	37.2732
400	100	2.20×10^{-1}	ETD	0.0500	0.0457
			ERK	0.0500	0.0278
			CN	0.0714	0.1015
	400	3.90×10^{-2}	ETD	0.0250	0.1881
			ERK	0.0200	0.1665
			CN	0.0333	2.0838
	900	2.00×10^{-2}	ETD	0.0250	1.5971
			ERK	0.0200	0.8417
			CN	0.0500	10.8411
	1600	1.11×10^{-2}	ETD	0.0167	8.8325
			ERK	0.0500	4.3349
			CN	0.0500	47.7389

Table S8: Comparison of numerical schemes under collocation points variation ($Re = 200, 400$) for $\epsilon = 0.4$.